مقدر (Sometimes Pool)للمرحلة الواحدة والمرحلتين للدالة المعولية للتوزيع الأسى باستخدام عينات المراقبة للزمن(النوع الأول).

SOMETIME-POOL ESTIMATOR FOR ONE AND TWO STAGE OF REIABILITY FUNCTION OF EXPONENTIAL DISTRIBUTION FOR TIME CENCORD DATA (TYPE I)

م. م. علاء خليف جحيل - جامعة ذي قار/ كلية التربية/قسم الرياضيات

الخلاصة

درسنا في هذا البحث مشكلة تقدير الدالة المعولية للتوزيع الآسي بأسلوب SPT للمرحلة الواحدة والمرحلتين للعينات المقطوعة بالنسبة إلى الزمن (النوع الأول) متجاوزين بعض عيوب المقدرات المشابهة بأخذ عامل التقلص بشكل متغير بدلا عن أخذه ثابت اعتمادا على تصغير متوسط مربعات الخطأ للمقدرات المقترحة واشتقت معادلات التحيز ومتوسط مربعات الخطأ والكفاءة النسبية وحسبت عدديا لمختلف القيم وتبين أفضلية المقدرات المقترحة عن المقدرات الكلاسيكية بالنسبة عالية في جوار المعلومات المسبقة.

Abstract

Let T be random variable has exponential distribution ,this paper deal with suggest some one & two stage shrunken estimators for reliability function of exponential distribution using type I censored data . In this paper the shrunken factor is variable we find it by minimizing mean squared error for suggest estimators .The bias, mean squared error and relative efficiency expressions are derived. Empirical conclusions are drawn about the selection of different constant involved in the estimators. Comparisons with known results show the best of this estimators.

١. المقدمة (Introduction) :

في هذه الدراسة سنتناول مشكلة وضع عدد من الوحدات التجريبية تحت اختبار ما، حيث ان ذلك الاختبار سيتوقف بعد زمن محدد نرمز له بالرمز T_0 أي قبل ان يتم فشل جميع الوحدات . في هذه الحالة، ان عدد الوحدات الفاشلة، وزمن الفشل لكل وحدة

عبارة عن متغير عشوائي، وان البيانات تسمى عينات المراقبة للزمن او من النوع الأول (Type I Censored).في هذا النوع من العينات توضع n من الوحدات قي اختبار حياتي ويتوقف الاختبار عند بلوغ زمن محدد مسبقاً مقداره T كما ان أي مفردة تفشل تستبدل بمفردة جديدة مماثلة لها. حيث يرمز لهذا النوع من العينات بالرمز (n, C, T) حيث T تقاس بالوحدات الزمن (ساعة ، يوم ، . . . ، الخ) .

فمثلا العينة (100,C,1000) فهذا يعني ان هناك 100 وحدة توضع تحت الاختبار حتى 1000 ساعة هنا يكون عدد الوحدات الفاشلة ولنرمز له بالرمز r_0 متغيرا عشوائيا فإذا كان $r_0 = 15$ فهذا يعني ان هناك 15 حالة فشل تحدث للفترة الزمنية (1000 ساعة). ان مثل هذه البيانات عادة تشاهد في معظم حقول المعرفة خصوصا الحقول الطبية والهندسية التي تهتم باعمار مفرداتها أو وحداتها التجريبية (Experimental Units) بالاعتماد على هذا النوع من العينات، وبافتراض توفر بعض المعلومات المسبقة بشكل قيم تقديرية أولية θ_0 (Initial Value) حول المعلمة المجهولة θ سيتم دراسة تقدير الدالة المعولية (Reliability Function) محققين بذلك الادخار في وحدات المعاينة للتوزيع الاسي (Exponential distribution) ذا الدالة التجميعية (Cumulative distribution) الآتية:

$$F(t|\theta) = 1 - \exp(-t\theta),\ t \geq 0,\ \theta \geq 0; \qquad (1)$$

حيث ان θ تسمى معلمة القياس. كما ان الدالة المعولية R(t) النظام(أو الوحدة) تعرف بانها احتمال البقاء على الأقل للزمن t وتعطى كما يلي:

$$R(t) = 1 - F(t|\theta) = \exp(-t\theta) \qquad (2)$$

ان التقدير الكلاسيكي للمعلمة θ ومن ثم لـR(t) من الممكن إيجاده بسهولة (انظر [13]Sinha) وكذلك ان التقدير البيزي (Bayes estimator) للمعلمة θ و R(t) لقد درس من قبل عدد كبير من الباحثين نورد منهم (Pugh (1963) & Basu (1964)).

ولغرض الاستفادة من المعلومات الأولية θ_0 وبتحقيق الادخار في تقديرات المعالمات أو دوال المعولية يتم استخدام الأسلوب المسمى SPT (Sometimes – Pool Testimation). ان اسلوب SPT قد طبق لتقدير مختلف المعلمات للتوزيعات الاحصائية ومن قبل عدد كبير من الباحثين فيما يخص تقدير المعلمة θ للتوزيع الاسي وللعينات الكاملة أو المراقبة نورد منهم على سبيل المثال.

Adke & Others (1987), Handa & Others (1988), Adke & Gokhale (1989), Kambo & Others (1991) & Al-Hemywri (1999)

إلا ان تقدير الدالة R(t) بطريقة SPT لم يعطي الاهتمام المطلوب لذا قام الباحث عبد مضحي

(1999) بدراسة الدالة المعولية R(t) للتوزيع الاسي بطريقة SPT ذو المرحلة الواحدة باستخدام العينات الكاملة والمراقبة من النوع الاول والثاني واقترح المقدر الآتي:

$$\tilde{R}_1(t)=\{[\exp(-t\,|\,\theta_0)]I_R+\exp(-t\,|\,K\hat{\theta})]I_{\bar{R}}\} \quad ,(3)$$

حيث أن I_R، $I_{\bar{R}}$ هما دالتين رمزيتان تشيران إلى مجال القبول ومجال الرفض على التوالي وان $\hat{\theta}$ مقدر MLE لـθ. كذلك درس الباحث جحيل (2004) بدراسة المشكلة نفسها ولكن بتطبيق أسلوب SPT ذا المرحلتين و باستخدام العينات الكاملة والمراقبة من النوع الاول و الثاني أيضاً، وكما في المقدر الآتي:

$$\tilde{R}_2(t)=\{[\exp(-tk\hat{\theta}_1-(1-K)\theta_0)]I_R+[\exp(-t(n_1\hat{\theta}_1+n_2\hat{\theta}_0)\,|\,(n_1+n_2)]I_{\bar{R}}\} \quad (4)$$

حيث أن $\hat{\theta}j\ ,\ j=1,2$ مقدر الأمكان الأعظم للمرحلة j و $0\le K\le 1$.

ونظرا لوجود بعض العيوب في مقدرات الباحثين عبد مضحي (1999) و جحيل (2004) كون اختيار عامل التقلص K يتم بصورة عشوائية دون اية ضوابط معينة عاد الباحث جحيل (2008) معتمدا على اسلوب الباحثين اعلاه مع اسلوب الباحثين Upadhyah and Sing,(1985) باقتراح مقدرات تقلص للمرحلة الواحدة والمرحلتين للدالة المعولية للتوزيع الاسي باستخدام العينات الكاملة في هذا البحث سوف نستخدم نفس اسلوب الباحث جحيل (2008) باقتراح مقدرات باسلوب SPT ذو المرحلة الواحدة والمرحلتين للدالة المعولية للتوزيع الاسي باستخدام العينات المقطوعة بالنسبة الى الزمن (النوع الاول Type I) . وكما نوهنا سابقا ان عدد الوحدات الفاشلة r_0 في هذا النوع من العينات ومن ثم تقديرات المعلمة θ متغيرات عشوائية تتبع توزيع Poisson خلال المدة الزمنية T (انظر: Gendenko (1969)) ان هذا النوع من العينات قام بدراسته عدد من الباحثين مثل Al–Hemyahi (1988) Rai وجماعته، (1999)، عبد مضحي (1999). نفرض ان r_0 متغير عشوائي. يمثل عدد الوحدات الفاشلة والمشاهدة خلال الزمن T وتفرض ان $X_1, X_2, \ldots, Xr_0$ أيضاً تمثل أوقات الوحدات الفاشلة ذات العدد r_0. أن MLE لـθ يكون (المصدر السابق) كما يلي:

$$\hat{\theta}=\frac{r_0}{nT} \quad (5)$$

ان توزيع المقدر $\hat{\theta}$ يعطى بالصيغة الأتية :

$$P(\hat{\theta})=\begin{cases}\dfrac{(n\theta T)^{r_0}}{r_0!}\exp(-n\theta T), & r_0=0,1,2,\ldots,.\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \quad (6)$$

٢.المقدر المقترح ذو المرحلة الواحدة $\tilde{R}_3(t)$:

سيكون مقدرنا المقترح بأسلوب SPT ذو المرحلة الواحدة مع تعويض مقدر الإمكان الأعظم لـ $\hat{\theta}$ كما ورد بالعلاقة (٥) نحصل عل مقدر الاتي :

$$\tilde{R}_3(t)=\begin{cases} K(\exp(-\frac{tr_0}{nT})-\exp(-t\theta_0))+\exp(-t\theta_0), & \text{if } \hat{\theta}\in R \\ \exp(--\frac{tr_0}{nT}), & \text{if } \hat{\theta}\notin R \end{cases} \qquad (7)$$

سنقوم باشتقاق معادلات التحيز ونسبة التحيز ومتوسط مربعات الخطأ والكفاءة النسبية للمقدر أعلاه .أما معادلتي التحيز ونسبة التحيز تعطينا بشكل الاتي :

$$\tilde{R}_3(t)=\begin{cases} K(\exp(-\frac{tr_0}{nT})-\exp(-t\theta_0))+\exp(-t\theta_0), & \text{if } \hat{\theta}\in R \\ \exp(--\frac{tr_0}{nT}), & \text{if } \hat{\theta}\notin R \end{cases} \qquad (7)$$

سنقوم باشتقاق معادلات التحيز ونسبة التحيز ومتوسط مربعات الخطأ والكفاءة النسبية للمقدر أعلاه .أما معادلتي التحيز ونسبة التحيز تعطينا بشكل الاتي :

$$\text{Bias}(\tilde{R}_3(t),R(t))=E(\tilde{R}_3(t))-R(t) \qquad (8)$$

اما

$$=K\sum_{r_0=a}^{b}\frac{(\exp(-(\frac{tr_0}{nT}))-\exp(-t\theta_0))\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}$$
$$+\exp(-t\theta_0)\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}+\sum_{r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-((\frac{tr_0}{nT})+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}-\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-((\frac{tr_0}{nT})+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}$$
$$-\exp(-t\theta) \qquad (9)$$

نسبة التحيز للمقدر $\tilde{R}_3(t)$ تعطى بالعلاقة الاتية :

$$\text{Bais Rito}(\tilde{R}_3(t),R(t))=\frac{(\tilde{R}_3(t),R(t))}{\exp(-t\vartheta)} \qquad (10)$$

$$
= K\exp(t\theta)\sum_{r_0=a}^{b}\frac{(\exp(-(\frac{tr_0}{nT}))-\exp(-t\theta\lambda))\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}
$$

$$
+\exp(-t\theta(\lambda-1))\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}+\exp(t\theta)\left[\sum_{r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-((\frac{tr_0}{nT})+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}-\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-((\frac{tr_0}{nT})+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}\right]
$$

$$
-1 \qquad (11)
$$

حيث ان $Q=n\theta T$

اما متوسط مربعات الخطأ للمقدر $\tilde{R}_3(t)$ فيعطى بالصيغة :

$$
MSE(\tilde{R}_3(t),R(t))=E(\tilde{R}_3(t)-R(t))^2 \qquad (12)
$$

$$
= K^2\sum_{r_0=a}^{b}\frac{(\exp(-(\frac{tr_0}{nT}))-\exp(-t\theta\lambda))^2\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}
$$

$$
-2K(\exp(-t\theta\lambda)-\exp(t\theta\lambda))\sum_{r_0=a}^{b}\frac{(\exp(-(\frac{tr_0}{nT}))-\exp(-t\theta\lambda))\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}
$$

$$
+(\exp(-t\theta\lambda)-\exp(-t\theta))^2\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}+\sum_{r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-(\frac{2t\theta r_0}{Q}+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}
$$

$$
-\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-(\frac{2t\theta r_0}{Q}+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}-2\exp(-t\theta)\left[\sum_{r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-(\frac{t\theta r_0}{Q}+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}-\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-(\frac{t\theta r_0}{Q}+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}\right]
$$

$$
+\exp(-2t\theta)\left[1-\sum_{r_0=a}^{b}\frac{\exp(-Q)(Q)^{r_0}}{r_0!}\right] \qquad (13)
$$

ولاجل اشتقاق معادلة الكفاءة النسبية لابد من حساب معادلة متوسط مربعات الخطأ للمقدر الكلاسيكي $\hat{R}(t)$ والتي تكون بالشكل :

$$
MSE(\hat{R}(t),R(t))=\sum_{r_0=0}^{\infty}\frac{(\exp(-(\frac{2t\theta\, r_0}{Q}+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}-2\exp(-t\theta)\sum_{r_0=0}^{\infty}\frac{(\exp(-(\frac{t\theta\, r_0}{Q}+Q))(Q)^{r_0}}{r_0!}
$$

$$
+\exp(-2t\theta) \qquad (14)
$$

لان يمكن اعطاء معادلة الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}_3(t)$ بالشكل الاتي :

$$RE(\tilde{R}_3(t),R)=\frac{MSE(\hat{R}(t),R)}{MSE(\tilde{R}_3(t),R)} \qquad (15)$$

اما المجال R بالنسبة لهذا المقدر سيتم اشتقاقه بالاعتماد على العلاقة الاتية

$$R=\{\hat{\theta};(\hat{\theta}-\theta_0)\le MSE(\hat{\theta}\,|\,\theta_0)\} \qquad (1٦)$$

$$\mathbf{R}=\left(\mathbf{max(0,(\theta_0-\frac{\sqrt{\theta_0}}{nT})),((\theta_0+\frac{\sqrt{\theta_0}}{nT}))}\right) \qquad (17)$$

اما عامل التقلص K فسيتم ايجاده عن طريق تصغير متوسط مربعات الخطأ بالنسبة الى K كمايلي:

$$\frac{\partial \mathbf{MSE(\tilde{R}_3(t),R)}}{\partial \mathbf{K}}=0$$

وبحل المعادلة اعلاه من اجل قيمة K نحصل على :

$$\mathbf{K}^*=\frac{\mathbf{(exp(-t\theta\lambda)-exp(t\theta)}\displaystyle\sum_{\mathbf{r_0}=a}^{b}\frac{(\exp(-\frac{t\theta r_0}{\mathbf{Q}})-\exp(-t\theta_{\mathbf{0}}))\mathbf{Q}^{\mathbf{r_0}}}{r_0}}{\displaystyle\sum_{\mathbf{r_0}=a}^{b}\frac{(\exp(-\frac{t\theta r_0}{\mathbf{Q}})-\exp(-t\theta_{\mathbf{0}}))^2\mathbf{Q}^{\mathbf{r_0}}}{r_0}} \qquad (18)$$

ولغرض ان نكون متاكدين ان قيمة K تقع في الفترة $[0,\ 1]$ لذلك تكون قيمة K بشكل الاتي

$$\mathbf{K}=\begin{cases}0 & , \quad \mathbf{K}^*\le 0\\ \mathbf{K}^* & , \quad 0\le \mathbf{K}^*\le 1\\ 1 & , \quad \mathbf{K}^*\ge 1\end{cases} \qquad (19)$$

٣. المقدر ذو المرحلتين المترافد $\tilde{\mathbf{R}}_4\mathbf{(t)}$:

يكون مقدر المرحلتين المترافد بالشكل :

$$\tilde{\mathbf{R}}_4\mathbf{(t)}=\begin{cases}\mathbf{K(exp(-\frac{t_1r_0}{n_1T_1})}-\exp(-\mathbf{t\theta_0}))+\mathbf{(1-K)}\exp(-\mathbf{t\theta_0}), & \mathbf{if}\quad \hat{\theta}_1\in\mathbf{R}\\ \mathbf{exp(-\frac{t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)}-\frac{t_2r_0}{T_2(n_1+n_2)})}, & \mathbf{if}\quad \hat{\theta}\notin\mathbf{R}\end{cases} \qquad (20)$$

وكما في المقدر $\tilde{\mathbf{R}}_3\mathbf{(t)}$ سنقوم بايجاد معادلات التحيز ،نسبة التحيز ، متوسط مربعات الخطاو الكفاءة النسبية للمقدر اعلاه .اما معادلة التحيز للمقدر تكون كمايلي :

$$\text{Bias}(\tilde{\mathbf{R}}_4\mathbf{(t)},R(t))=E(\tilde{\mathbf{R}}_4\mathbf{(t)})-\mathbf{R(t)} \qquad (2١)$$

$$= K\sum_{{}_1r_0=a}^{b}\frac{(\exp(-(\frac{t_1r_0}{n_1T_1}))-\exp(-t\theta_0))\exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{r_0!}+\exp(-t\theta_0)\sum_{{}_1r_0=a}^{b}\frac{\exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}$$

$$+\sum_{{}_2r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-(\frac{t_2 2r_0}{T_2(n_1+n_2)}+Q_2))(Q_2)^{{}_2r_0}}{{}_2r_0!}$$

اما

$$\left[\sum_{{}_1r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-(\frac{t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)}+Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}-\sum_{{}_1r_0=a}^{b}\frac{\exp(-(\frac{t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)}+Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}\right]$$

$$-\exp(-t\theta) \qquad (22)$$

نسبة التحيز تعطى بالعلاقة الاتية :

$$\text{Bais Rito}(\tilde{\mathbf{R}}_4(\mathbf{t}),R(t))=\frac{(\tilde{\mathbf{R}}_4(\mathbf{t}),\mathbf{R(t)})}{\exp(-t\vartheta)} \qquad (23)$$

$$= K\sum_{{}_1r_0=a}^{b}\frac{(\exp(-(\frac{t\theta_1r_0}{Q_1}))-\exp(-t\theta\lambda)\exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{r_0!}$$

$$+\exp(-t\theta(\lambda-1))\sum_{{}_1r_0=a}^{b}\frac{\exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}$$

$$+\exp(t\theta)\sum_{{}_2r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-(\frac{t_2 2r_0}{T_2(n_1+n_2)}+Q_2))(Q_2)^{{}_2r_0}}{{}_2r_0!}$$

$$\left[\sum_{{}_1r_0=0}^{\infty}\frac{\exp(-(\frac{t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)}+Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}-\sum_{{}_1r_0=a}^{b}\frac{\exp(-(\frac{t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)}+Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}\right]$$

$$-1 \qquad (24)$$

حيث ان $Q_j=n_jT_j\theta \quad , \quad j=1,2$

كما ان معادلة متوسط مربعات الخطا للمقدر تكون :

$$\text{MSE}(\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t}),R(t))=E(\tilde{\mathbf{R}}_3(\mathbf{t})-\mathbf{R(t)})^2$$

$$= K^2 \sum_{{}_1r_0=a}^{b} \frac{(\exp(-(\frac{t\theta\ {}_1r_0}{Q_1})) - \exp(-t\theta\lambda))^2 \exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}$$

$$- 2K(\exp(-t\theta\lambda) - \exp(t\theta)) \sum_{{}_1r_0=a}^{b} \frac{(\exp(-(\frac{t\theta\ {}_1r_0}{Q_1})) - \exp(-t\theta\lambda))\exp(-Q_1)(Q_1)^{r_0}}{{}_1r_0!}$$

$$+ (\exp(-t\theta\lambda) - \exp(-t\theta))^2 \sum_{{}_1r_0=a}^{b} \frac{\exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{r_0!} + \sum_{{}_2r_0=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{2t_2r_0}{T_2(n_1+n_2)} + Q_2))(Q_2)^{{}_2r_0}}{{}_2r_0!}$$

$$\left[\sum_{{}_1r_0=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{2t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)} + Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!} - \sum_{{}_1r_0=a}^{b} \frac{\exp(-(\frac{2t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)} + Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!} \right]$$

$$+ 2\exp(-t\theta) \sum_{{}_2r_0=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{t_2r_0}{T_2(n_1+n_2)} + Q_2))(Q_2)^{{}_2r_0}}{{}_2r_0!}$$

$$\left[\sum_{{}_1r_0=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)} + Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!} - \sum_{{}_1r_0=a}^{b} \frac{\exp(-(\frac{2t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)} + Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!} \right]$$

$$+ \exp(-2t\theta)\left[1 - \sum_{{}_1r_0=a}^{b} \frac{\exp(-Q_1)(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}\right] \qquad (25)$$

اما متوسط مربعات الخطا للمقدر الكلاسيكي في حالة الترافد فيعطى بالعلاقة الاتية :

$$MSE(\hat{R}(t), R(t)) = \exp(-2t\theta)\left[\begin{array}{l} \exp(2t\theta) \sum_{{}_1r_0=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{2t_1r_0}{T_1(n_1+n_2)} + Q_1))(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!} \\ \sum_{{}_2r_0=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{2t_1r_0}{T_2(n_1+n_2)} + (Q_2))(Q_2)^{{}_2r_0}}{{}_2r_0!} \end{array} \right.$$

$$-2\exp(t\theta)\sum_{{}_1r_0=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-\left(\frac{t_1 r_0}{T_1(n_1+n_2)}+Q_1\right)\right)(Q_1)^{{}_1r_0}}{{}_1r_0!}\sum_{{}_2r_0=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-\left(\frac{t_2 r_0}{T_2(n_1+n_2)}+(Q_2)\right)\right)(Q_2)^{{}_2r_0}}{{}_2r_0!}+1\Bigg] \qquad (26)$$

ومن خلال معادلتي (٢٤، ٢٥) نحصل على معادلة الكفاءة النسبية والتي تعرف :

$$RE(\tilde{R}_4(t),R)=\frac{MSE(\hat{R}(t),R)}{MSE(\tilde{R}_4(t),R)} \qquad (27)$$

حيث ان المجال R سيتم ايجاده بالاعتماد على العلاقة الاتية:

$$R=\{\hat{\theta}_1;(\hat{\theta}_1-\theta_0)\le MSE(\hat{\theta}_1\,|\,\theta_0)\} \qquad (28)$$

وبعد اجراء بعض التعويضات والتبسيطات نحصل على:

$$R=\left(\max\left(0,\left(1-\frac{\theta_0\sqrt{\frac{n_1^2}{\theta_0 n_1 T_1}+\frac{n_2^2}{\theta_0 n_2 T_2}}}{(n_1+n_2)}\right)\right),\left(1+\frac{\theta_0\sqrt{\frac{n_1^2}{\theta_0 n_1 T_1}+\frac{n_2^2}{\theta_0 n_2 T_2}}}{(n_1+n_2)}\right)\right) \qquad (29)$$

اما عامل التقلص K فهو نفس عامل التقلص في المقدر $\tilde{R}_3(t)$ ما عدا ابدال كلQ بـ Q1 .

٤. الاستنتاجات (Conclusions) :

في هذا المبحث سيتم دراسة المقدرين $\tilde{R}_4(t)$ ، $\tilde{R}_3(t)$ من حيث الكفاءة النسبية ،نسبة التحيز ولمختلف الثوابت التي تعتمد عليها تلك المقدرات حيث تم اختيار القيم التالية :

بالنسبة الى المقدر $\tilde{R}_3(t)$ القيم هي

Q=0.5(0.5)3.5 , $\lambda = \theta_0/\theta$ = 0.1 (0.1)2,3,5 , tθ=0.2(0.2)1.2

أما بالنسبة إلى المقدر $\tilde{R}_4(t)$ تم اختيار القيم التالية :

Q1 = 0.5 (0.5)2،Q2 = 0.5 (0.5)2
n1 = 4 (2) 12 , tθ = 2 (0.2) 2.8
n2 = 2 (2) 12 λ = 0.1 (0.1) 1, 5,10

وقد وضعت النتائج في الجداول (١,٢,٣)
ولم نذكر جميع التائج توخيا للاختصار :

١) من خلال الجداول (١) و (٢) وجد ان المقدران $\tilde{R}_4(t)$ ، $\tilde{R}_3(t)$ يتميزان بكفاءة نسبية عالية عند λ = 1 وتتناقص كلما ابتعدنا عن ذلك الجوار اي كلما ابتعدنا عن المعلومات المسبقة .

٢) وجد ان نسبة التحيز لكلا المقدرين $\tilde{R}_4(t)$ ، $\tilde{R}_3(t)$ مقبولة وقريبة من الصفر كلما اقتربت قيمة λ من ١ .

٣) وجد ان المقدر $\tilde{R}_4(t)$ افضل من المقدر $\tilde{R}_3(t)$ فكلا الاتجاهين من حيث الكفاءة النسبية واتساع المجال الفعال حيث ان المجال الفعال للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ هو 0.1<λ<10.0 اما المقدر $\tilde{R}_3(t)$ 0.1<λ<2.0.وهذا متوقع كون المقدر $\tilde{R}_4(t)$ هو مقدر ذو المرحلتين المترافد.

٤) وجد ان اعلى كفاءة نسبية متحققة للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ عندما تكون قيمة كل من Q2, Q1 صغيرة وان اعلى كفاءة نسبية متحققة عند Q1= Q2 = 0.5.

٥) من خلال ملاحظة الجدول رقم (٢) وجد ان اعلى كفاءة نسبية متحققة عند تكون n1 قليلة وان اعلى كفاءة نسبية متحققة عند n1=4,n2=12 .

٦) وجد ان اعلى كفاءة نسبية متحققة عند tθ=2 لكلا المقدرين $\tilde{R}_4(t)$ ، $\tilde{R}_3(t)$.

٧) عند مقارنة النتائج العدية للمقدران $\tilde{R}_4(t)$ ، $\tilde{R}_3(t)$ مع نتائج المقدران $\tilde{R}_2(t)$ ، $\tilde{R}_1(t)$ التي تمثل نتائج الباحثين جحيل (2004) و عبد مضحي (1999) لوحظ ان الكفاءة النسبية للمقدران $\tilde{R}_4(t)$ ، $\tilde{R}_3(t)$ ليس افضل من المقدران الباحثين اعلاه عند اختيار قيمة K=0.1 ولكن تكون افضل منها عند بقية خيارات K .

جدول رقم (١) يبين الكفاءة النسبية و نسبة التحيز للمقدر $\tilde{R}_3(t)$ عند $t\theta = 2$

λ Q	٠.١	0.5	1.0	2	5
1.5	7.7780 - 0.0345	7.9280 - 0.0342	21.0800 - 0.0171	7.2440 - 0. 0010	3.4960 - 0.0123
2	27.3280 - 0.0260	27.7320 - 0.0340	61.6760 - 0.0172	25.5960 - 0.0012	13.0920 0.0124
2.5	18.8980 - 0.0290	19.0000 - 0.0338	23.8680 - 0.0172	18.4380 - 0.0014	13.4380 0.0125
3	5.5260 -0.0258	5.5320 - 0.0838	5.7620 - 0.0173	5.4960 - 0.0015	5.0700 0.0125
3.5	1.5200 -0.0258	1.5210 - 00356	1.5360 - 0.0174	1.5180 - 0.0015	1.4860 - 0.0124

جدول رقم (٢) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ عند $Q_1 = Q_2 = 0.5,\ t\theta = 2$

λ n1 n2	٠.١	0.5	1.0	5	10.0
4 2	1.2977	8.6430	118.6155	13.89.86	13.8675
4	1.2878	8.8198	126.9479	13.7239	13.7030
6	1.2888	8.6760	144.8733	13.7763	13.7463
8	1.2871	8.1949	169.4019	13.8966	13.8666
10	1.2828	7.5617	164.6555	14.0606	14.0303
12	1.5471	6.9196	210.8848	14.2526	14.2223
6 2	1.3271	5.2893	119.9066	14.2525	14.2222
4	1.2896	8.7066	120.0272	13.77	13.7433
6	1.2878	8.8196	126.9479	13.7239	13.6940
8	1.2888	8.7692	137.9987	13.7493	13.7194
10	1.2887	8.5444	152.5096	13.8104	13.7804
12	1.2871	8.1949	169.2898	13.8966	13.8666
8 2	1.3646	8.8732	122.8532	14.6779	14.6472
4	1.2977	8.6430	118.6115	13.8966	13.7194

6	1.2882	8.7444	121.3185	13.7493	13.7194
8	1.2958	8.8198	126.9479	13.7239	13.6940
10	1.2886	8.7939	134.7483	13.7389	13.7120
12	1.2888	8.6760	144.8733	13.7239	13.7104
10 2	1.4040	8.6430	118.6115	158.1143	15.1011
4	1.3108	8.6472	118.8925	14.0606	14.0437
6	1.2916	8.6766	119.2479	13.8104	13.7984
8	1.2879	8.7654	122.2459	13.7389	13.7270
10	1.2878	8.8179	126.9479	13.7239	13.7058
12	1.2074	8.8191	133.1233	13.7339	13.7058
12 2	1.4421	9.2940	121.4195	15.5344	15.5210
4	1.3271	8.6967	119.9067	14.2526	14.2403
6	1.2977	8.6430	118.6115	13.8966	13.8846
8	1.2896	8.7066	120.0272	13.7763	13.7633
10	1.2877	8.8680	122.9200	13.7763	13.7673
12	1.2878	8.8198	126.9479	13.7059	13.7120

جدول رقم (3) يبين نسبة التحيز للمقدر $\tilde{R}_4(t)$ عند $Q_1 = Q_2 = 0.5, \; t\theta = 2$

λ n1 n2	٠.١	0.5	1.0	1.1
4 2	2.63574	1.01178	0.03861	0.03861
4	2.72034	1.09674	0.12357	0.12357
6	2.80899	1.17513	0.20196	0.20196
8	2.63574	1.24632	0.27315	-0.0711
10	2.72034	0.81036	0.15912	0.01368
12	3.04362	0.83853	0.13455	0.09207
6 2	2.61117	0.92313	0.04995	0.16335
4	2.66265	1.01178	0.03861	0.26892
6	2.72034	1.09674	0.12357	0.24435
8	2.77965	1.17513	0.20196	0.16002
10	2.83797	0.80289	0.17019	-0.0711
12	2.89395	0.83853	0.13455	0.01368

8 2	2.60019	0.80289	0.17019	0.09207
4	2.63574	0.92313	0.04995	0.27999
6	2.67678	0.96759	-0.0549	0.24435
8	2.72034	1.09674	0.12357	0.27999
10	2.7648	0.83853	0.13455	0.15975
12	2.80899	0.92313	0.04995	0.11529
10 2	2.59398	0.85446	0.11862	0.01368
4	2.62071	0.88812	0.08496	0.24435
6	2.65437	0.92313	0.04995	0.15975
8	2.68533	0.83853	0.13455	0.22842
10	2.72034	0.7929	0.18018	0.19485
12	2.75589	0.81396	0.15912	0.15975
12 2	2.59011	0.81396	0.15912	0.24435
4	2.61117	0.86544	0.10764	0.28998
6	2.63574	0.89307	-0.0792	0.26892
8	2.66265	0.92313	-0.4995	0.26892
10	2.69109	2.69109	2.69109	0.21744
12	2.72034	2.72034	2.72034	0.18909

المصادر(References) :

المصادر العربية :

١. جحيل ،علاء خليف (٢٠٠٤)، مقدرات التقلص للاختبار الاولي ذو المرحلتين للدالة المعولية للتوزيع الاسي ،رسالة ماجستير،مقدمة الى كلية التربية /ابن الهيثم جامعة بغداد;٦٣-٧٠

٢. جحيل ،علاء خليف (2008)، مقدرات التقلص ذوات المرحلة الواحدة و المرحلتين المترافد للدالة المعولية للتوزيع الاسي باستخدام العينات الكاملة ،مجلة علوم ذي قار ٢(١) ;٨٦-١٠١

٣. مضحي ،جبار عبد (١٩٩٩)، بعض تقيمات المعولية للتوزيع الاسي باستخدام المعلومات المسبقة ،رسالة ماجستير،مقدمة الى كلية التربية /ابن الهيثم جامعة بغداد ; ٣٣-٣٥

المصادر الاجنبية :

4. Adke, S.R., & Gokhale, D.V. (1989). A note on shrinkage factors in two stage testimation. Commun. Statist. Theory Meth., 18 (2);633- 637.

5. Adke, S.R., Waiker, V.B and Schuurmann, F.J. (1987). A Two stage shrinkage testimator for the mean of an exponential distribution. Comm. Statist. Theor. Meth., A16 (6);1821- 1834.

6. Al- Hemyari, Z.A. (1999), Sometimes- Pool testimator of the mean life for time Censored data- Al-fath J., Must. Univ., 4; 1-14.

7. Basu, A. P. (1964). Estimates of reliability for some distributions useful in life testing. Technometrics. 6; 215-219.

8. Gnedenko, B. V., Belyayev, Ku. K. and Solovyev A. D. (1969). Mathematical Methods of Reliability Theory. Academic Press.

9. Handa, B. R., Kambo, N. S. and Al- Hemyari, Z. A. (1988) On double stage shrunken estimator for the mean of exponential distribution. IAPQR. Trans. 13, 1; 19.

10. Kambo, N. S., Handa B.R. and Al- Hemyari, Z. A. (1991). On shrunken estimator for exponential scale parameter. Journal of Statist. Planning and Inference, 24; 283-301.

11. Pandey M. and Upadhyay, S. K. (1985). Bayesian shrinkage estimation of reliability from censored sample with exponential failure model. South Africa. Statist. J; 21- 23.

12. Pugh, E. L. (1963). The best estimate of reliability with exponential case. Operat. Res. 11;57- 61.

13. Sinha, S. K. & Irwin Guttman (1976). Bayesian inference about the reliability function for the exponential distribution. Commun. Statist.- Theory Meth., A5(5); 471- 479.