محاكاة خمسة طرائق لتقدير معلمة ودالة معولية التوزيع الأسي

م. د.عبد الجبار خضر
قسم الإحصاء
كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة بغداد

م. م. انتصار عبيد حسون
قسم الرياضيات
كلية التربية/ جامعة البصرة

م. م. أسيل ناصر حسين
قسم إدارة الأعمال
كلية دجلة/ الجامعة الأهلية

1-1 المقدمة

تعتبر عملية التقدير أحد أركان عملية الاستدلال الاحصائي اضافة الى اختبار الفرضيات، وتتم بواسطة التقدير جمع المعلومات والأستنتاجات حول معلمة أومعلمات المجتمع على أساس النتـائج المستخرجة من العينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

هنالك طرائق عدة لتقدير معلمات مجتمع ما، منها مايسمى بالطرائق الأعتيادية والتي تعتمـد على عدم توفر معلومات مسبقة عن المعلمات المراد تقديرها وهناك طرائق اخرى تسمى الطرائق البيزية والتي تعتمد في تطبيقها على افتراض ان المعلمة أو المعلمات المراد تقـديرها مـاهي الا متغيرا عشوائيا له دالة يتوزع بموجبها.

وبهدف الحصول على مقدرات ذات خصائص جيدة خاصة في حالة وجود اكثر مـن طريقـة لتقدير معلمة ما، فان ذلك يؤدي الى دراسة المفاضلة بين هذه المقدرات لاختيار الأفضل منها وذلك بالاعتماد على معايير احصائية منها التحيز والتباين ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مطلق الخطأ النسبي وغيرها، فاذا انصب اهتمام الباحث بتحليل اوقات الفشل أو الوقت المستغرق لحين حصول الفشل او تأثير الحياة أو اوقات فشل المكائن،فأن التوزيع الأحتمالي الملائم لهـذه الحـالات هـو التوزيع الأسي او توزيع كاما او توزيع ويبل وغيرها. ونظرا لأهمية التوزيع الأسي فـي تحليـل الكثير من أوقات البقاء والمعولية لكثير من الاجهزة، ارتأينا تطبيق طرائق مختلفة مـن طرائـق التقدير لتقدير معلمات هذا التوزيع الذي تناوله الكثير من الباحثين نذكر علـى سـبيل المثـال لا الحصر Sinha & Sloan (1988) وVincenl (1997) والباحث Fernandez عـام (2000) وAlfawzang عام (2000) والناصـر(2002) والبيـاتي (2002) والناصـر والبيـاتي (2004) وغيرهم.

1-2 هدف البحث

يهدف البحث الى مقارنة خمس طرائق لتقدير معلمة التوزيع الأسي وهـي طريقـة الامكـان الاعظم وطريقة بيز وطريقة اخرى تمثل خليط من الطريقتين اضافة الى طريقـة بيـز التكعيبـي وطريقة بيز المفترحة، وقد اعتمدت المحاكاة في مقارنة النتائج واستخدام معيار MSE لتحقيـق المقارنة.

1-3 **الجانب النظري**:

ان الأنموذج الأسي الأكثر شيوعا" هو الأنموذج الأسي ذو معلمة واحدة θ وتمثل معـدل او متوسط الحياة او متوسط الوقت المستغرق لحين الفشل (MTTF) وهي تـساك سـلوك معلمـة القياس بينما تمثل المعلمـة $\left(\lambda = \frac{1}{\theta}\right)$ متوسـط معـدل الوصـول Mean arrival rate (MAR) ، اما الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع فهي:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$t \geq 0 \;;\; \theta \geq 0 \qquad f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)} \qquad \text{...(1)}$$

ومن خصائص هذا التوزيع :

1) انه من التوزيعات المستمرة وان دالة hazard له ثابتة.

2) ان دالة البقاء الأسية exponential survival function هي:

$$S(t) = p_r(T > t)$$

$$S(t) = \int_t^{\infty} f(t) d(t) = e^{-\lambda t} \qquad \text{...(2)}$$

3) ان الدالة الاحتمالية التجميعية cumulative distribution لهذا التوزيع هي:

$$F(t) = p_r(T \leq t)$$

$$= \int_0^t f(u) du$$

$$= 1 - p_r(T > t)$$

$$= 1 - S(t) \quad (3) \qquad \ldots F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

4) أما متوسط الوقت المستغرق لحين الوفاة فهو:

Mean Time to Death (MTTD) $= \int_0^{\infty} S(t) dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

5) وكذلك يعرف تباين التوزيع

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2$$

$$V(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6) يتمتع التوزيع الأسي بخاصية فقدان الذاكرة والتي تعني:

$$p_r(T > t+h \backslash T > t) = \frac{p_r(T > t+h, T > t)}{p_r(T > t)}$$

$$= \frac{p_r(T > t+h)}{p_r(T > t)}$$

$$= \frac{S(t+h)}{S(t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda h}$$

$$= p_r(T > h)$$

7) يتصف التوزيع الأسي بخاصية إعادة الـذات (self reproducing) اي ان توزيـع لصـغر احصاءة مرتبة من التوزيع الأسي هو أيضا أسي

The smallest order statistics from an exponential distribution also, has an exponential distribution.

وذلك لأن

$$F_{T_{(1)}}(t) = p_r(T_1 \le t)$$

ولكن

$$F_{T_{(1)}}(t) = 1 - p_r(T_1 > t)$$

$$p_r(T_{(1)} > t) = p_r\left[T_{(1)} > t, T_{(2)} > t, \ldots, T_{(n)} > t\right]$$

$$= \left[S(t)\right]^n$$

$$F_{T_{(1)}}(t) = 1 - \left[S(T)\right]^n$$

$$= 1 - \left[e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)} \right]^{n}$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{nt}{\theta}\right)}$$

من ذلك نحصل على:

$$f_{T_{(1)}}(t) = \frac{n}{\theta} e^{-\left(\frac{nt}{\theta}\right)} \qquad ; t > 0$$

وهذا يعني ان:

$$T_{(1)} \sim NE\left(\lambda = \frac{n}{\theta} \right)$$

بعد ان تناولنا التوزيع الأسي السالب بمعلمة واحدة نرى من الضروري الأشارة ولو بشكل مختصر الى التوزيع الأسي بمعلمتين(Tow Parameters Exponential) فأذا كان الفشل او الوفاة للوحدة الواحدة لا تحصل قبل الزمن t_o ، فأن t_o يعتبر اصغر وقت ، ويمكن اعتبار t_o هي معلمة الموقع التي تؤدي الى تحريك التوزيع بكمية مقدارها t_o الى اليمين من المحور الأفقي، وعندئذ يتطلب هذا اعادة كتابة دالة التوزيع الأسي باستبدال t ب$(t - t_o)$ وان مجال المتغير العشوائي الآن هو $(t \geq t_o)$،وعليه تصبح الدالة الاحتمالية:

$$f(t) = \frac{-\partial S(t)}{\partial t}$$

$$= \lambda e^{-\lambda(t - t_o)} \qquad 0 < t_o < t < \infty$$

$$0 \qquad \text{o/w}$$

اما دالة البقاء *S(t)* لهذا التوزيع فهي:

$$S(t) = e^{-\lambda(t - t_o)}$$

وتعرف دالة المخاطرة *Hazard function* $\lambda(t)$ بالصيغة:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda(t - t_o)}}{e^{-\lambda(t - t_o)}}$$

$$= \lambda$$

وعليه تكون قيمة MTTD

$$MTTD = \int_{t_o}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda(t-t_o)} dt$$
$$= t_o + \frac{1}{\lambda}$$

وكذلك التباين

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

إضافة لما سبق عندما يهتم الباحث بتحليل أوقات الوفاة الصغيرة جدا او الطويلة جـدا فـأن ذلك يستدعي استخدام توزيع أسي من درجات عليا hyper exponential والمعـرف بالدالـة الاحتمالية الآتية:

$$f(t,k,\lambda) = 2k^2 e^{-2k\lambda t} + 2\lambda(1-k)^2 e^{-2(1-k)\lambda t} \quad ...(4)$$

$0<k<0.5$

λ معدل متوسط البقاء

k معلمة الشكل للتوزيع

امادالة الكثافة الاحتمالية التجميعية (C.D.F) فهي:

$$F(t) = 1 - ke^{-2k\lambda t} - (1-k)e^{-2(1-k)\lambda t} \quad ...(5)$$

وان دالة البقاء في هذه الحالة هي:

$$S(t) = 1 - F(t)$$
$$= ke^{-2k\lambda t} + (1-k)e^{-2(1-k)\lambda t}$$

وان دالة المخاطرة $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{2\lambda(k^2 + (1-k)^2)e^{-2\lambda t(1-2k)}}{k + (1-k)e^{-2\lambda t(1-2k)}} \quad ...(6)$$

4-1 بعض طرائق تقدير معلمة التوزيع الأسي:

1- طريقة الإمكان الأعظم: Maximum Likelihood Method (ML)

اقترحت هذه الطريقة من قبل الباحث R. A. Fisher عام (1920) وتعتبر من طرائق التقدير المهمة وتمتاز مقدراتها بدقة جيدة. ان مبدأ هذه الطريقة يكمن في ايجاد قيمة تقديرية لمعلمة ما تجعل دالة الأمكان الأعظم، أعظم ما يمكن وتعرف دالة الأمكان بالآتي:

لتكن $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مفردات عينة عشوائية حجمها n مأخوذة من مجتمع دالة كثافته الأحتمالية $f(t,\theta)$ معلومة ، وان θ هي المعلمة المراد تقديرها، ان دالة الأمكان الأعظم ل θ يرمز لها بالرمز $L(t,\theta)$ وهي دالة احتمالية مشتركة صيغتها:

$$L(t,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta) \quad \ldots(7)$$

$$LnL(t,\theta) = \sum_{i=1}^{n} Ln\, f(t_i,\theta)$$

وبتطبيق هذا المفهوم على دالة التوزيع الأسي

$$f(t_i;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)}$$

$$LnL(t,\theta) = -nLn\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}$$

$$\frac{LnL(t,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta^2}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{t}$$

وان

$$E(\hat{\theta}_M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \theta$$

وهذا يعني ان $\hat{\theta}$ هو تقدير غير متحيز الى θ وان تباين هذا المقدر هو

$$V(\hat{\theta}_M) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(t_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$$

اما متوسط مربعات الخطأ للمقدر $\hat{\theta}$

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left[E(\hat{\theta}) - \theta\right]^2 = \frac{\theta^2}{n} \quad \ldots(8)$$

وبما ان مقدر الأمكان الأعظم يتصف بخاصية الثبات وطبقا لهذه الخاصية يكـون تقـدير دالة البقاءهو:

$$\hat{S}(t) = e^{-\left(\frac{t}{\hat{\theta}}\right)}$$

2- الطريقة البيزية: Bayes Method

اقترحت هذه الطريقة من قبل Thomas Bayes وتعتمد على افتراض ان المعلمات المـراد تقديرها ماهي الا متغيرات عشوائية يتطلب الحصول على معلومات مسبقة عنها وذلك بالاعتمـاد على التجارب السابقة للظاهرة المدروسة وبالتالي صياغة هذه المعلومات المسبقة بـشكل توزيـع احتمالي سابق (Prior Distribution)) وهناك صعوبة في تحديد هذا التوزيع بشكل دقيق لعـدم دقة المعلومات او صعوبة الحصول عليها.

ولتوضيح مفهوم مقدر بيز لنفرض ان $t_1, t_2, \ldots, t_n$ تمثل عينة عشوائية حجمهـا n من توزيع $f(t,\theta)$ وله دالة تجميعية $F(t,\theta)$ وفي حالة التوزيع الأسي نفرض ان الدالة الأحتمالية للمتغير T هي:

$$f(t,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)}$$

وهناك عدة خطوات يمكن استخدامها في مقدر بيز وهي:

1) هناك n من الوحدات خضعت للفحص وسجلت أوقات الحياة لها وكانت تمثل عينة عشوائية من التوزيع الأحتمالي $f(t,\theta)$ وان θ متغير عشوائي له قيم حقيقية.

2) ان الدالة الاحتمالية لوقت الوفاة $f(t,\theta)$ تعتبر دالة شرطية $f(t \backslash \theta)$ وان التوزيع الحدي للمعلمة θ هو $g(\theta)$

ان الصيغة العامة المقترحة $g(\theta)$ حسب مقترح Jeffery هي

$$g(\theta) = constant\sqrt{I(\theta)} \quad \ldots(9)$$

وتمثل $I(\theta)$ معلومات Fisher عن المعلمة θ وهي على انواع

i)

$$I(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2 LnL(t,\theta)}{\partial\theta^2}\right] \quad \ldots(10)$$

ii)

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial \ LnL(t,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 \quad \ldots(11)$$

iii)

$$I(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2 Lnf(t,\theta)}{\partial\theta^2}\right] \quad \ldots(12)$$

iv)

$$I(\theta) = nE\left[\frac{\partial Lnf(t,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 \quad \ldots(13)$$

3) ان الدالة الاحتمالية المشتركة لـ T مع θ هي:

$$H(t_1,t_2,\ldots,t_n,\theta) = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} f(t_i \backslash \theta)g(\theta)$$

$$= L(t_1,t_2,\ldots,t_n \backslash \theta)g(\theta)$$

4) ان الدالة الحدية للمتغير T هي $p(t_1,t_2,...,t_n)$ وتساوي

$$p(t_1,t_2,...,t_n)=\int_0^\infty H(t_1,t_2,...,t_n,\theta)$$

5) وكذلك تكون الدالة الشرطية ل θ علما بأن العينة هي $t_1,t_2,...,t_n$

$$h(\theta \setminus t_1,t_2,..., t_n)=\frac{H(t_1,t_2,..., t_n,\theta)}{p(t_1,t_2,..., t_n)} \quad ...(14)$$

6) ويكون مقدر بيز في حالة دالة المخاطرة التربيعية هو متوسط التوزيع اللاحـق ل $(\theta \setminus t)$ وهو

$$E(\theta \setminus t_1,t_2,...,t_n)=\int_0^\infty \theta h(\theta \setminus t_1,t_2,...,t_n)d\theta$$

وبغية تطبيق هذه الافكار على التوزيع الأسي $f(t,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)}$

، نستخرج اولا" معلومات فيشر

$$Lnf(t,\theta)=-Ln\,\theta-\frac{t}{\theta}$$

$$\frac{\partial Lnf(t,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{1}{\theta}+\frac{t}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 Lnf(t,\theta)}{\partial\theta^2}=\frac{1}{\theta^2}-\frac{2t}{\theta^3}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 Lnf(t,\theta)}{\partial\theta^2}\right)=\frac{1}{\theta^2}-\frac{2E(t)}{\theta^3}$$

$$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^2}$$

$$= -\frac{1}{\theta^2}$$

$$\therefore I(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2 Lnf(t,\theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

$$= \frac{n}{\theta^2}$$

وعندما

$$g(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

اي ان $g(\theta) \propto \frac{\sqrt{n}}{\theta}$

$$\Rightarrow g(\theta) = k\frac{\sqrt{n}}{\theta}$$

$$L(t_1,t_2,...,t_n,\theta) = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} f(t_i \backslash \theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}\right)}$$

فان الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرينT ، θ هي

$$H(t_1,t_2,...,t_n,\theta) = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} f(t_i \backslash \theta) g(\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^{n}} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} \cdot \frac{k\sqrt{n}}{\theta}$$

$$= \frac{k\sqrt{n}}{\theta^{n+1}} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} \qquad \ldots(15)$$

ومنها نجد ان

$$p(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \int_0^\infty H(t_1,t_2,\ldots,t_n,\theta)d\theta$$

$$= \int_0^\infty \frac{k\sqrt{n}}{\theta^{n+1}} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} d\theta$$

$$= k\sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} d(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{k\sqrt{n}\Gamma(n)}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}$$

وعندئذ تكون الدالة الشرطية $h(\theta \backslash t_1,t_2,\ldots,t_n)$

$$h(\theta \backslash t_1,t_2,\ldots,t_n) = \frac{\frac{k\sqrt{n}}{\theta^{n+1}} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)}}{\frac{k\sqrt{n}}{\left(\sum t_i\right)^n}(n-1)!} \qquad \ldots(16)$$

$$= \frac{1}{\theta^{n+1}} \cdot \frac{\left(\sum t_i\right)^n}{(n-1)!} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} \qquad ; t > 0$$

$$0 \qquad \text{o/w}$$

وباستخدام دالة الخسارة التربيعية

$$L(\hat{\theta},\theta) = c(\hat{\theta} - \theta)^2$$

وايجاد المخاطرة $S(\hat{\theta},\theta) = E[L(\hat{\theta},\theta)]$

وهي القيمة المتوقعة للخسارة يكون مقدر بيز

$$\ldots(17) \quad \hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \theta^{-n} e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} d\theta$$

$$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n-1}$$

وهو مقدر متحيز لأن

$$E(\hat{\theta}_B) = \frac{n}{n-1}\theta$$

وان مقدر التحيز هو

$$biase = E\left(\hat{\theta}_B\right) - \theta$$

$$= \frac{1}{n-1}\theta$$

وان

$$Var(\hat{\theta}_B) = \frac{n}{(n-1)^2}\theta^2$$

$$\ldots(18) \quad MSE(\hat{\theta}_B) = \frac{n}{(n-1)^2}\theta^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\theta^2$$

$$= \frac{n+1}{(n-1)^2}\theta^2$$

اما مقدر بيز لدالة المعولية فيستحصل من الاتي:

$$\hat{S}(t)=E\left(S(t)\setminus t\right)=\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\theta}}h(\theta\setminus t_1,t_2,...,t_n)d\theta$$

وبتعويض المعادلة(16) في المعادلة السابقة نحصل على الآتي:

$$\hat{S}(t)=\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\theta}}\left(\frac{1}{\theta^{n+1}}\right).\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}{(n-1)!}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}}d\theta$$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^{n+1}}e^{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i+t\right)}{\theta}}d\theta$$

ولحل هذا التكامل نفرض أن:

$$y=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i+t\right)}{\theta}$$

$$\theta=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i+t\right)}{y}\Rightarrow d\theta=-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i+t\right)}{y^2}dy$$

$$\hat{S}(t)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sum t_i+t}{y}\right)^{n+1}}e^{-y}\,\frac{-\left(\sum t_i+t\right)}{y^2}dy$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}{\left(\sum t_i + t\right)^n (n-1)!} \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy$$

$$\hat{S}(t_{Bayes}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i + t} \right)^n$$

3- طريقة الخلط: Mixture Method

وتعتبر طريقة مقترحة وتعتمد على ايجاد مقدر جديد يمثل خلط مقدرين مثلا طريقة الامكان الاعظم مع طريقة بيز، أو مزج طريقة العزوم مع طريقة بيز ،أو طريقة وايت مع المقلصة وغيرها بهدف الحصول على صيغة تقديرية للمعلمة يكون عندها متوسط مربعات الخطأ اقل ما يمكن، فاذا افترضنا ان $\hat{\theta}_M$ هو مقدر الأمكان الأعظم ، $\hat{\theta}_B$ هو مقدر بيز فان المقدر المقترح والذي يمثل خليط من المقدرين هو :

$$\hat{\theta}_{mix} = p\hat{\theta}_M + (1-p)\hat{\theta}_B \quad ...(19)$$

ولكي نوجد قيمة $\hat{\theta}_{mix}$ لابد من ايجاد قيمة p التي تجعل متوسط مربعات الخطأ اقل مايمكن وحسب الأسلوب الآتي:

نطرح قيمة θ من طرفي المعادلة (19)

$$\hat{\theta}_{mix} - \theta = \left[p\hat{\theta}_M + (1-p)\hat{\theta}_B\right] - \theta \quad ...(20)$$

ثم نربع طرفي المعادلة(20) ونأخذ التوقع لها نحصل على:

$$E\left[\left(\hat{\theta}_{mix} - \theta\right)^2\right] = p^2 E\left(\hat{\theta}_M\right)^2 + 2p(1-p)E\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\hat{\theta}_B\right) + (1-p)^2 E\left(\hat{\theta}_B\right)^2$$

$$- 2pE\left(\hat{\theta}_M\right)E(\theta) - 2(1-p)E\left(\hat{\theta}_M\right)E(\theta) + E(\theta)^2 \quad ...(21)$$

ثم نشتق بالنسبة الى p

$$\frac{\partial E\left[\left(\hat{\theta}_{mix}-\theta\right)^2\right]}{\partial p}=2pE\left(\hat{\theta}_M\right)^2+\left(2-4p\right)E\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\hat{\theta}_B\right)-2\left(1-p\right)E\left(\hat{\theta}_B\right)^2$$

$$-2E\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\theta\right)+2E\left(\hat{\theta}_B\right)E\left(\theta\right) \qquad \ldots(22)$$

$$\because\ E\left(\theta\right)=\theta$$

عندئذ يمكن تحديد القيمة التقديرية لـp من جعل المشتقة الجزئية (22) تساوي صفر

$$pE\left(\hat{\theta}_M\right)^2+E\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\hat{\theta}_B\right)-2pE\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\hat{\theta}_B\right)-E\left(\hat{\theta}_B\right)^2+pE\left(\hat{\theta}_B\right)^2$$
$$-\theta E\left(\hat{\theta}_M\right)+\theta E\left(\hat{\theta}_B\right)=0$$

$$p=\frac{\theta E\left(\hat{\theta}_M\right)-\theta E\left(\hat{\theta}_B\right)-E\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\hat{\theta}_B\right)+E\left(\hat{\theta}_B\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_M\right)^2-2E\left(\hat{\theta}_M\right)E\left(\hat{\theta}_B\right)+E\left(\hat{\theta}_B\right)^2}$$

$$\because\ E\left(\hat{\theta}_M\right)=\theta$$

وأن

$$E\left(\hat{\theta}_B\right)=\frac{n}{(n-1)}\theta$$

وبتعويض صيغ التوقع في قيمة p نحصل على الآتي:

$$p=\frac{\theta^2-\left(\frac{n}{(n-1)}\right)\theta^2-\theta^2\left(\frac{n}{(n-1)}\right)+\left(\frac{n}{(n-1)^2}\right)\theta^2+\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right)\theta^2}{\left(\frac{\theta^2}{n}+0\right)-2\theta^2\left(\frac{n}{(n-1)}\right)+\left(\frac{n}{(n-1)^2}\right)\theta^2+\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right)\theta^2}$$

…(23)

$$p=\frac{\theta^2-\left(\frac{2n}{(n-1)}\right)\theta^2+\left(\frac{n+1}{(n-1)^2}\right)\theta^2}{\frac{\theta^2}{n}-\left(\frac{2n}{(n-1)}\right)\theta^2+\left(\frac{n+1}{(n-1)^2}\right)\theta^2}$$

بعد التبسيط والاختصارتكون قيمة p التي تحقق أقل MSE للمقدر المختلط هي

…(24)

$$p=\frac{2n+n^2-n^3}{4n^2-n+1-2n^3}$$

وتمثل n حجم العينة المسحوبة لتقدير المعلمة $\hat{\theta}_{mix}$.

وكذلك يمكن ايجاد تقدير تقريبي لدالة المعولية باستخدام الصيغة:

…(25)

$$\hat{S}(t_{mix})=e^{-\left(\frac{t}{\hat{\theta}_{mix}}\right)}$$

4- طريقة بيز التكعيبي: Cubic Bayes Method (CB)

تفترض هذه الصيغة ان دالة الخسارة هي عبارة عن دالة تكعيب الخطأ

$$L\left(\hat{\theta},\theta\right)=C\left(\hat{\theta}-\theta\right)^3$$

وبما أن المخاطرة (Risk) تمثل القيمة المتوقعة للخسارة اي ان

$$\hat{S}\left(\hat{\theta},\theta\right)=EL\left(\hat{\theta},\theta\right) \qquad \text{…(26)}$$

$$=\int_0^\infty C\left(\hat{\theta}-\theta\right)^3 h(\theta\backslash t)d\theta$$

$$=C\hat{\theta}^3\int_0^\infty h(\theta\backslash t)d\theta-3C\hat{\theta}^2\int_0^\infty \theta h(\theta\backslash t)d\theta+3C\hat{\theta}\int_0^\infty \theta^2 h(\theta\backslash t)d\theta-C\int_0^\infty \theta^3 h(\theta\backslash t)d\theta$$

وبأخذ المشتقة الجزئية ل $\hat{S}\left(\hat{\theta},\theta\right)$ **نسبة الى** $\hat{\theta}$ **وجعل المشتقة تساوي صفر نتوصل الى**

$$\frac{\partial S\left(\hat{\theta},\theta\right)}{\partial\hat{\theta}}=3C\hat{\theta}^2-6C\hat{\theta}E(\theta\backslash t)+3CE\left(\theta^2\backslash t\right)=0$$

…(27)

$$\hat{\theta}^2-2\hat{\theta}E(\theta\backslash t)+E\left(\theta^2\backslash t\right)=0$$

وهذه معادلة غيـر خطيـة يمكـن حلهـا باسـتخدام طريقـة الدسـتور علمـا" أن $E(\theta \backslash t)$ و $E(\theta^2 \backslash t)$ يمكن ايجادها كما يأتي:

$$E(\theta \backslash t) = \int_0^\infty \theta h(\theta \backslash t) d\theta \qquad \ldots(28)$$

$$= \int_0^\infty \theta \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} \right) . \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^n}{(n-1)!} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}} d\theta$$

ولحل هذا التكامل نفرض أن:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{y} \Rightarrow d\theta = -\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{y^2} dy$$

وبعد تعويض هذه التبسيطات في المعادلة (28) نحصل على:

$$E(\theta \backslash t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty y^n e^{-y} \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i}{y^2} dy$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-2} e^{-y} dy$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i}{(n-1)!} \Gamma (n-1)$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i}{(n-1)} \qquad \ldots(29)$$

وبنفس الاسلوب نجد $E(\theta^2 \setminus t)$

$$E(\theta^2 \setminus t) = \int_0^\infty \theta^2 h(\theta \setminus t) d\theta$$

$$E(\theta^2 \setminus t) = \int_0^\infty \theta^2 \left(\frac{1}{\theta^{n+1}}\right) \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^n}{(n-1)!} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}} \theta d\theta$$

Let $\quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{y} \Rightarrow d\theta = -\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{y^2} dy$$

$$E(\theta^2 \setminus t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty y^n e^{-y} \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{y} \cdot \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i}{y^2} dy$$

$$E(\theta^2 \setminus t) = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-3} e^{-y} dy$$

$$= \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)!} \Gamma(n-2)$$

$$= \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)(n-2)} \qquad \ldots(30)$$

نعوض $E(\theta \backslash t)$ و $E(\theta^2 \backslash t)$ في المعادلة (27)

$$\hat{\theta}^2 + 2\hat{\theta}\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{(n-1)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)(n-2)} = 0$$

اذ أن:

$$a=1 \quad , \quad b = 2.\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{(n-1)} \quad , \quad c = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$\hat{\theta}_{CB} = \frac{-2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}{(n-1)} \pm \sqrt{4\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)^2} + 4\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}{(n-1)(n-2)}}}{2}$$

$$\hat{\theta}_{CB} = \frac{-2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}{(n-1)} \pm 2\sum_{i=1}^{n} t_i \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}}}{2}$$

$$\hat{\theta}_{CB} = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{-1}{(n-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}} \right] \qquad \ldots(31)$$

5- طريقة مقترحة: Proposed Method

تم اقتراح صيغة جديدة بافتراض أن دالة الخسارة تأخذ الصيغة الآتية:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = C(\hat{\theta} - \theta)^4$$

حيث يستخرج تقدير المعلمة θ باجراء الخطوات الآتية:

$$S(\hat{\theta}, \theta) = \int_0^\infty C(\hat{\theta} - \theta)^4 h(\theta \backslash t) d\theta$$

$$S(\hat{\theta},\theta)=C\hat{\theta}^4\int_0^\infty h(\theta\setminus t)d\theta-4C\hat{\theta}^3\int_0^\infty \theta h(\theta\setminus t)d\theta+6C\hat{\theta}^2\int_0^\infty \theta^2 h(\theta\setminus t)d\theta$$
$$-4C\hat{\theta}\int_0^\infty \theta^3 h(\theta\setminus t)d\theta+C\int_0^\infty \theta^4 h(\theta\setminus t)d\theta$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة السابقة نسبة الى $\hat{\theta}$ وجعل المشتقة تساوي صفر نحصل على

$$\frac{\partial S(\hat{\theta},\theta)}{\partial\hat{\theta}}=4C\hat{\theta}^3-12C\hat{\theta}^2E(\theta\setminus t)+12C\hat{\theta}E(\theta^2\setminus t)-4CE(\theta^3\setminus t)=0$$

$$\hat{\theta}^3-3\hat{\theta}^2E(\theta\setminus t)+3\hat{\theta}E(\theta^2\setminus t)-E(\theta^3\setminus t)=0 \qquad \ldots(32)$$

علما" أن

$$E(\theta\setminus t)=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}{(n-1)}$$

$$E(\theta^2\setminus t)=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$E(\theta^3\setminus t)=\int_0^\infty \theta^3 h(\theta\setminus t)d\theta$$
$$=\int_0^\infty \theta^3\left(\frac{1}{\theta^{n+1}}\right).\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^n}{(n-1)!}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta}}d\theta$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta}}\theta^2 d\theta \qquad \ldots(33)$$

ولحل هذا التكامل نفرض ان

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta}$$

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{y}\Rightarrow d\theta=-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{y^2}dy$$

$$E\left(\theta^3 \setminus t\right)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty y^n e^{-y}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{-\sum_{i=1}^{n}t_i}{y^2}\right)dy$$

$$=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^3}{(n-1)!}\int_0^\infty y^{n-4}e^{-y}dy$$

$$=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^3}{(n-1)!}\Gamma\,(n-3)$$

$$=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

نعوض $E(\theta \setminus t)$ و $E(\theta^2 \setminus t)$ و $E(\theta^3 \setminus t)$ في المعادلة (32)

...(34)

$$\hat{\theta}^3+3\hat{\theta}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{(n-1)}-3\hat{\theta}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2}{(n-1)(n-2)}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}=0$$

حيث يمكن ايجاد $\hat{\theta}$ باستخدام طريقة البحث المباشر (Direct Search) .

5-1 تحليل نتائج عملية المحاكاة

تم اعتماد المحاكاة لتقدير المعلمة θ ودالة معولية التوزيع الأسي باستخدام برنامج كتب بلغة (Visual Basic) بالأعتماد على صيغة متوسط مربعات الخطأ الآتية:

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i-1}^{R}(\theta_i - \theta)^2}{R}$$

$$MSE(\hat{S}) = \frac{\sum_{i-1}^{R}(S_i - S)^2}{R}$$

إذ أن

R: عدد التكرارات Replication لكل تجربة والذي كان مساويا الى100.

وقد أختيرت ثلاث قيم افتراضية لحجم العينة وهي ($n=10,25,50$) واربع قيم قيم افتراضية للمعلمة هي (θ = $0.3,0.7,1.1,1.5$) .

وفيما يأتي النتائج التي توضح قيم تقدير معلمة ودالة المعولية ومتوسط مربعات الخطأ لجميع الأحجام والنماذج المختارة ولكافة الطرائق المدروسة.

6-1 الأستنتاجات

من خلال تنفيذ تجربة المحاكاة لمقارنة طرائق تقديرمعلمة ودالة معولية التوزيع الأسي تم التوصل الى الأستنتاجات الآتية:

1- ان أفضل طريقة لتقدير معلمة التوزيع الأسي هي طريقة الأمكان الأعظم وذلك لأمتلاكها أقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) تأتي من بعدها بالافضلية كل من الطريقة المختلطة وطريقة بيز على التوالي.

2- ان أفضل طريقة لتقدير دالة معولية التوزيع الأسي هي طريقة بيز وذلك لأمتلاكها أقل قيمة لمتوسط مربعات ألخطأ التكاملي (IMSE) الذي هو عبارة عن تكامل للمساحة الكلية (T_i) واختزالها بقيمة واحدة معبرة عن الزمن الكلي وان صيغته هي:

$$IMSE(\hat{S}) = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} MSE\left[\hat{S}(t_i)\right] \qquad i = 1,2,\ldots,n_t$$

7-1 المصادر

1- صالح، مكي اكرم محمد (2006) "محاكاة طرائق تقدير المعولية"، أطروحـة دكتـوراه، كليـة التربية- الجامعة المستنصرية.

2- النائب، بلسم مصطفى شفيق (2003) "تقدير دالة المعولية لتوزيع لوغـاريتم الطبيعـي مـع تطبيق عملي" رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد.

3- Al- Kutbi, H. S. (2005), "On Comparison Estimation Procedures for Parameter and Survival Function Exponential Distribution Using Simulation", Iraq, Baghdad University, College of Ibn Al- Haitham.

4- Ebeling, C. E. (1997) "An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering" New York, McGraw-Hill Companies, Inc.

5- Kapur, K. C. and Lamberson, L. R. (1977) "Reliability In Engineering Design" John Wiley and Sons.

6- Kaylan, A. R. and Harris C. M. (1981) "Efficient Algorithms To Derive Maximum-Likelihood Estimates For Finite Exponential and Weibull Mixtures" Computer and Operation Research , Vol. 8 , No. 1, PP. 97-104