بعض طرائق تقدير دالة المعولية لنماذج احتمالية مركبة باستخدام المحاكاة

أ.م.د.تهاني مهدي عباس

طالب الماجستير. مهدي علي عبد الحسين (*)

كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد

المستخلص

تعد التوزيعات الاحتمالية المركبة من التوزيعات الاحصائية التي كسبت اهمية متميزة في العقود الاخيرة وذلك لتطبيقاتها الواسعة في المجالات الهندسية والصناعية والتجارب الطبية والبايلوجية وبناءً على ذلك فقد تم اقتراح انموذج احتمالي مركب (الاسي – ويبل) ذو الثلاث معلمات حيث تم في الجانب النظري دراسة خصائصه ودالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية ودالة المعولية وقد تم استعمال طريقتين لتقدير دالة المعولية هما طريقة المقدرات التجزيئية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة.

Abstract

The probability distributions combined of important statistical distributions which gained importance and wide in recent decades, to the importance of their use in scientific fields, and at the Advanced has been addressed in this discretion to the specimen probabilistic compound (exponential - Weibull) with three parameters and characteristics enjoyed by such possibility Writing probability density function and cumulative function and reliability function was used two different methods of estimating

1- Percentiles Estimators Method

2- Weighted least Squares Method

المبحث الاول : منهجية البحث

1-1 المقدمة:-

في ظل تنامي ظاهرة العولمة شهد العالم في العقود الاخيرة الانفتاح في العديد من المجالات وما صاحبها من تحرير للتجارة العالمية اذ فرض هذا التنافس الدخول الى الاسواق العالمية لجذب الاستثمارات الخارجية وفي هذه الاثناء وجدت الدول النامية نفسها في وضع لا تحسد عليه فأما ان تحاول الالتحاق بالدول المتطورة بشتى الطرق او التأخير .حيث اصبح من الضروري الاهتمام بموضوع المعولية للمنتجات الصناعية بكافة انواعها لكي تتمكن من البقاء والمنافسة في الاسواق ،ومن خلال اهمية المعولية وتطبيقاتها توجه الباحثين لدراسة اوقات الفشل والمعولية لأغلب التوزيعات المستمرة وباستمرار التطور الحديث ظهرت مجموعة من التوزيعات سميت بالتوزيعات الاحتمالية المركبة والتي حظيت باهتمام واسع من قبل العديد من الباحثين وذلك لاستعمالها في كثير من المجالات وخاصة في حقل المعولية .

(*) جزء مستل من رسالة ماجستير للباحث الثاني.

ونظرا لكون التوزيعات الاحتمالية المركبة هي احد نماذج الفشل التي تبحث في اداء عمل الانظمة والاجهزة المعقدة فقد زاد الاهتمام في تقدير دالة المعولية لهذه التوزيعات وذلك لمعرفة العمر التشغيلي لعدد من المكائن والمعدات من خلال تمثيلها بدالة واحدة ومعرفة مدى كفاءة هذه المكائن ومن ثم تقيمها .
سيتم في هذه البحث استعمال انموذج احتمالي مركب جديد وهو (الاسي – ويبل) ذو الثلاث معلمات كأنموذج للفشل بالاعتماد على بيانات سحبت من السجلات المتوفرة لدى الشركة العامة للصناعات النسيجية في واسط والتي تخص اوقات العطلات لمكائن قسم النسيج.

2-1 هدف البحث

الهدف الاساسي للبحث هو تقدير دالة المعولية لأنموذج احتمالي مركب من توزيعين هما التوزيع الاسي وتوزيع ويبل باستعمال اثنين من طرائق التقدير وهي طريقة المقدرات التجزيئية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة واستخدام المعيار الاحصائي (MSE) بهدف الوصول الى المقدر الافضل في التقدير .

3-1الاستعراض المرجعي

تناولت العديد من البحوث والدراسات السابقة موضوع تقدير دالة المعولية للأنظمة المختلفة وذلك باستخدام نماذج الفشل الشائعة في التطبيقات العملية وفيما يلي بعض البحوث والدراسات ذات العلاقة حول هذا الموضوع.

*في عام (2004) نشر (SARALEES, KOTZ)[14] بحثاً تضمن نموذج احتمالي مركب(THE BETA GUMBEL DISTRIBUTION) ومن ثم دراسة خصائصه الرياضية مثل دالة الكثافة الاحتمالية والوسط الحسابي والتباين والالتواء والتفلطح وكذلك رسم الدالة الاحتمالية ودالة المخاطرة ودالة المعولية وتم اقتراح طريقة الامكان الاعظم لتقدير معالم النموذج الاحتمالي المركب وتطبيقه على بيانات حقيقية في الجانب الهندسي.

*في عام (2007) قدم(Kong واخرون)[13] بحثاً تضمن نموذج احتمالي مركب (Beta – Gamma) ومن ثم دراسة خصائص النموذج باستخدام توزيع كاما العام وايجاد دالة المعولية ودالة المخاطرة وتطبيق النموذج على بيانات حقيقية .

* في نفس عام (2007) اقترح(Lee واخرون)[10] نموذج احتمالي مركب (Beta-Weibull distribution) وتم إيجاد بعض خصائص الانموذج الاحتمالي المركب ومن ثم تطبيقه على بيانات حقيقية للرقابة على فشل حركة الحافلات .

*في عام (2008) اقترح (Alfred واخرون)[5] نموذج احتمالي مركب لتوزيع (Beta-Pareto) ذو اربعة معلمات ومن ثم دراسة خصائص التوزيع من حيث الوسط الحسابي والانحراف المعياري والتباين والالتواء والتفلطح وكذلك تم تقدير معالم النموذج بطريقتين هما العزوم والامكان الاعظم وطبق النموذج على بيانات الفيضانات .

*في عام (2009) قدم(Souza واخرون)[8] بحثاً تضمن نموذج احتمالي مركب (Beta-Generalized Exponential) ودراسة النموذج الاحتمالي من حيث خصائصه الرياضية واشتقاق العزوم من الدرجة r^{th} وتم تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة الامكان الاعظم وتطبيق هذا النموذج على بيانات حقيقية.

*في عام (2010) نشر(Patricia واخرون)[15] بحثاً للتوزيع المركب (beta Burr XII) حيث تم اشتقاق الدالة المولدة للعزوم ودالة المعولية وتم تقدير معالم النموذج الجديد بطريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز واجراء مقارنة بين الطريقتين باستخدام المحاكاة وكذلك تطبيق النموذج على بيانات حياتية .

*في عام (2011) قدم (Cardeior,Lemonts)[11] بحثاً تضمن نموذج احتمالي مركب لتوزيع (Beta –Half- Cauchy) وتم ايجاد الوسط الحسابي والتباين ودالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية ودالة المعولية ودالة المخاطرة وايجاد العزوم من الدرجة r^{th} وتم تقدير معالم الانموذج بطريقة الامكان الاعظم وتطبيقه على بيانات في قسم البيئة .

* في نفس العام نشر (Castellares واخرون)[9] بحثاً تضمن نموذج احتمالي مركب لتوزيع (beta log -normal) وتم دراسة خصائص النموذج الاحتمالي من حيث دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية وتم تطبيق طريقة الامكان الاعظم لتقدير معالم النموذج وتطبيق النموذج على مجموعة بيانات حياتية.

*في عام (2013) اقترح (Alzatreh واخرون)[7] نموذج احتمالي جديد لتوزيع (weibull-pareto) ودراسة خصائص النموذج الرياضية من حيث دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية واشتقاق العزوم من الدرجة r^{th} والمنوال وتم تقدير معالم النموذج بطريقة الامكان الاعظم وتطبيق النموذج على بيانات حقيقية .

*وفي العام نفسه نشر الباحثان (ALkadim,Boshi)[6] بحثاً تضمن توزيع (Exponential-pareto) وذلك باستعمال توزيعين مستقلين هما الاسي وتوزيع باريتو وتم دراسة خصائص التوزيع الجديد من حيث دالة الكثافة الاحتمالية ودالة المعولية والدالة التراكمية ودالة المخاطرة واستعمال طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات التوزيع الاحتمالي الجديد.

*في عام (2014) قدم (Tahir واخرون)[16] بحثاً تضمن انموذج احتمالي مركب جديد (A New Weibull –Pareto distribution) وايجاد بعض خصائصه مثل دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التجميعية ودالة المخاطرة والدالة المولدة للعزوم وتم تطبيقه على بيانات المصابين بمرض سرطان الرئة .

المبحث الثاني : الجانب النظري

1-2 تمهيد:-

يتضمن هذا المبحث بعض المفاهيم الاساسية والتعاريف ذات العلاقة كما يتضمن ايضا اشتقاق صيغة رياضية لأنموذج احتمالي مركب وهو توزيع (الاسي – ويبل) ذو الثلاث معلمات وقد قام الباحث باشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية (P.d.f) وكذلك الدالة التجميعية ومن ثم تقدير معلمات الانموذج الاحتمالي المركب ببعض الطرائق طريقة المقدرات التجزيئية (P.C) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (W.L.S).

2-2 الانموذج الاحتمالي المركب(الاسي–ويبل):

Exponential Weibull distribution

تناولت العديد من البحوث والدراسات موضوع الانموذج الاحتمالي المركب مثل توزيع(بيتا – باريتو ، بيتا – الاسي ، بيتا – كاما ،كاما - الطبيعي) وغيرها اذ تعد هذه التوزيعات حالة خاصة من توزيعات اوقات الفشل الشائعة والمستخدمة في حقل المعولية ولقد تم اقتراح انموذج احتمالي مركب جديد وهو توزيع (الاسي – ويبل) ذو الثلاث معلمات وكالاتي .

$$F_{ew}(x) = \int_0^{\frac{1}{1-F^{\#}(x)}} f^*(x)dx \qquad X > 0 \qquad . . . \qquad (2-1)$$

حيث ان$F^{\#}(x)$هي الدالة التجميعية لتوزيع ويبل والتي تساوي

$$F(x) = 1 - e^{-aX^b}$$

وان$f^*(x)$تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي

$$f^*(x) = \beta e^{-\beta x}$$

ان دالة التوزيع التجميعية للأنموذج الاحتمالي المركب الجديد تكون كالاتي:

$$F_{ew}(x; a, b, \beta) = \int_0^{\frac{1}{1-(1-e^{-ax^b})}} \beta e^{-\beta x}dx \qquad . . . \qquad (2-2)$$

$$F_{ew}(x;a,b,\beta)=\int_0^{e^{ax^b}}\beta e^{-\beta x}dx$$

$$F_{ew}(x;a,b,\beta)=-\left[e^{-\beta x}\right]_0^{e^{ax^b}}$$

$$F_{ew}(x;a,b,\beta)=1-e^{-\beta e^{ax^b}} \qquad . \quad . \quad . \qquad (2-3)$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية للأنموذج الاحتمالي المركب تعطى كما يأتي :

$$f_{ew}(x;a,b,\beta)=\frac{dF_{ew}(x;a,b,\beta)}{dx}$$

$$f_{ew}(x;a,b,\beta)=0-e^{-\beta e^{ax^b}}(-\beta)e^{ax^b}abx^{b-1}$$

$$\therefore \quad f_{ew}(x;a,b,\beta)=ab\beta x^{b-1}e^{ax^b}\,e^{-\beta e^{ax^b}} \quad ; \quad x>0 \qquad . \; . \; . \qquad (2-4)$$

ولتحقيق هل الدالة في المعادلة اعلاه هي دالة احتمالية يجب تحقق الشرطين الآتيين :

1- $f(x)\geq 0$
2- $\int_0^{\infty} f_{ew}(x)dx=1$

$$\int_0^{\infty} ab\beta x^{b-1}e^{ax^b}\,e^{-\beta e^{ax^b}}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} f_{ew}(x)=-\left[e^{-\beta e^{ax^b}}\right]_0^{\infty}$$

$$\int_0^{\infty} f_{ew}(x)=-(e^{-\infty}-e^{-\beta})$$

$$\int_0^{\infty} f_{ew}(x)=e^{-\beta} \qquad . \; . \; . \qquad (2-5)$$

الدالة في المعادلة (2-5) هي دالة غير احتمالية لان تكاملها لا يساوي واحد عليه فان الاسلوب الملائم لتحويلها الى دالة احتمالية هو ضربها في مقلوب التكامل

$$f_{ew}(x)=\frac{ab\beta x^{b-1}e^{ax^b}\,e^{-\beta e^{ax^b}}}{e^{-\beta}} \qquad . \; . \; . \qquad (2-6)$$

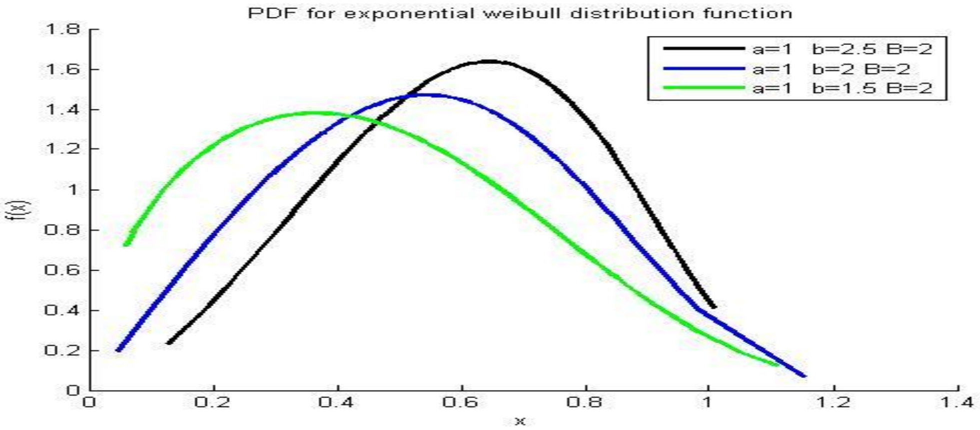
$$\therefore f_{ew}(x)=ab\beta x^{b-1}e^{ax^b}e^{\beta}\,e^{-\beta e^{ax^b}} \qquad . \; . \; . \qquad (2-7)$$

الان نختبر اذا كانت الدالة في المعادلة $(2-7)$احتمالية ام غير احتمالية

$$\int_0^{\infty} f_{ew}(x)dx=1$$

$$\int_0^{\infty} ab\beta x^{b-1}e^{ax^b}e^{\beta}\,e^{-\beta e^{ax^b}}\,dx=1$$

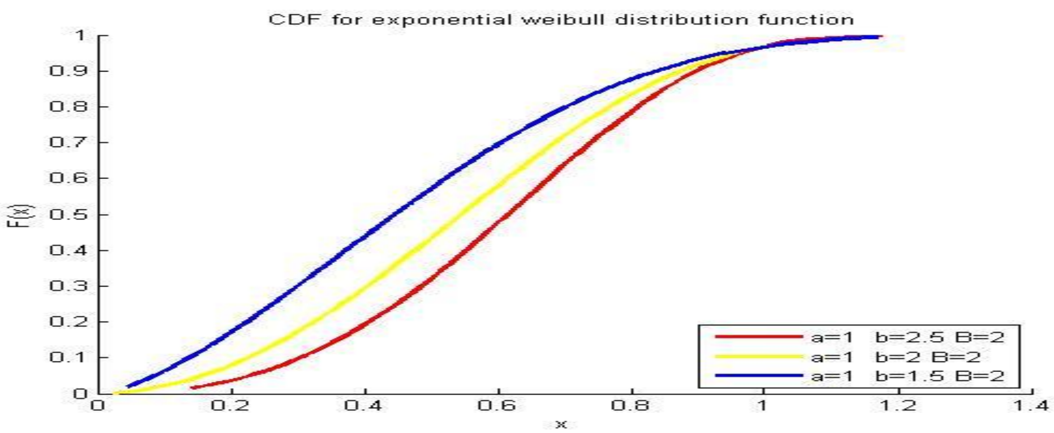
$$\int_0^{\infty} ab\beta x^{b-1} e^{ax^b}\ e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}\ dx = 1$$
$$= -\left[e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}\right]_0^{\infty}$$
$$= -[e^{-\beta(\infty)} \quad - \quad e^{-\beta(1-1)}]$$
$$= [0 \quad + \quad e^0]$$
$$= 1$$



الشكل (2-1)
دالة الكثافة الاحتمالية للأنموذج الاحتمالي المركب (الاسي – ويبل) عند حجم عينة 100

وان دالة التوزيع التراكمية للأنموذج المركب يمكن الحصول عليها كالاتي :

$$F_{ew}(x; a, b, \beta) = \int_0^x f(u)\, du$$
$$F_{ew}(x; a, b, \beta) = \int_0^x ab\beta u^{b-1} e^{au^b}\ e^{-\beta(e^{au^b}-1)}$$
$$F_{ew}(x; a, b, \beta) = -[e^{-\beta(e^{au^b}-1)}]_0^x$$
$$F_{ew}(x; a, b, \beta) = -\left[e^{-\beta(e^{ax^b}-1)} \quad - \quad e^{-\beta(e^0-1)}\right]$$
$$F_{ew}(x; a, b, \beta) = 1 - e^{-\beta(e^{ax^b}-1)} \qquad . \ . \ . \qquad (2-8)$$

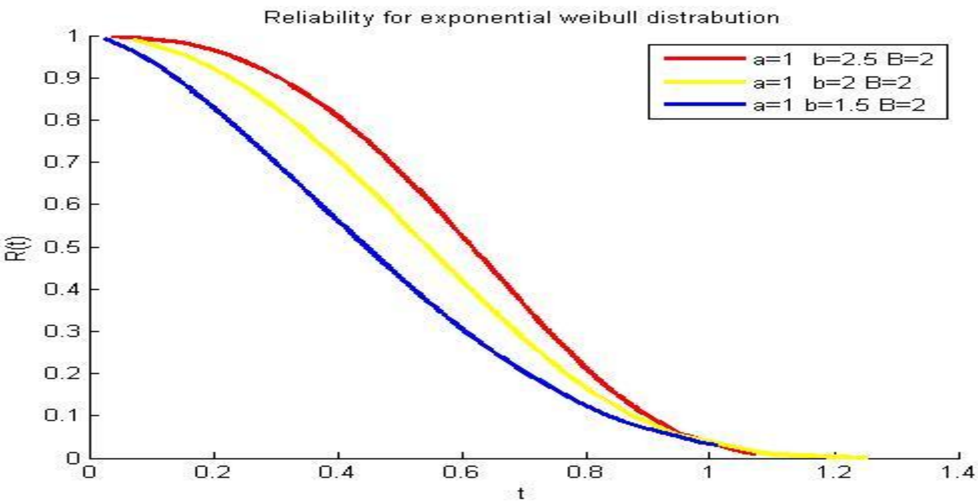


الشكل(2-2)

دالة الكثافة التجميعية للأنموذج الاحتمالي المركب (الاسي - ويبل) عند حجم عينة 100

وان دالة المعولية تعطى بالشكل الاتي:

$$R(t) = e^{-\beta(e^{at^b}-1)} \quad . \ . \ . \quad (2-9)$$



الشكل (2-3)

دالة المعولية للأنموذج الاحتمالي المركب (الاسي ويبل)عند حجم عينة 100

ودالة المخاطرة تكون :

$$h(t) = \frac{f_{ew}}{R_{ew}(t)}$$

$$h(t) = \frac{ab\beta t^{b-1} e^{at^b} \; e^{-\beta(e^{at^b}-1)}}{e^{-\beta(e^{at^b}-1)}}$$

$$\therefore h(t) = ab\beta t^{b-1} e^{at^b} \quad . \ . \ . \quad (2-10)$$

خصائص الانموذج الاحتمالي المركب(الاسي - ويبل)

1- الوسط الحسابي :-

$$E(x) = \int_0^\infty x\, f(x)dx$$

$$E(x) = \int_0^\infty x \;\; ab\beta\, x^{b-1} e^{ax^b} \; e^{\beta} \; e^{-\beta e^{ax^b}} dx$$

$$E(x) = ab\beta e^{\beta} \int_0^\infty x \;\; e^{ax^b} e^{-\beta e^{ax^b}} \;\; dx$$

2- التباين :-

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \;\; ab\beta\, x^{b-1} e^{ax^b} \; e^{\beta} \; e^{-\beta e^{ax^b}} dx$$

$$E(x^2) = ab\beta e^{\beta} \int_0^\infty x^{b+1} \; e^{ax^b} e^{-\beta e^{ax^b}} \;\; dx$$

$$\mathrm{var}(x) = [E(x^2) - [E(x)]^2]$$

3- الالتواء :-

$$C.S = \frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3}$$

4- التفلطح:-

$$C.K = \frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4}$$

لا يمكن الحصول على الوسط الحسابي والتباين والالتواء والتفلطح للأنموذج الاحتمالي المركب نظريا وذلك لصعوبة التكاملات .

3-2 **طرائق التقدير**: **Estimation of Methods**

نستعرض في هذا المبحث بعض طرائق التقدير التي تستخدم في عملية تقدير المعلمات للأنموذج الاحتمالي المركب(الاسي – ويبل) وذلك من اجل التوصل الى افضل المقدرات لمعلمات التوزيع وهذه الطرائق هي : طريقة المقدرات التجزيئية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة وكما يأتي :

1-3-2 طريقة المقدرات التجزيئية **Percentiles Estimators of Method (P.C)**

اقترحت هذه الطريقة من قبل العالم Kao وقد تم استخدامها بنجاح كبير في تقدير معالم توزيع ويبل والتوزيع الاسي .وسوف يتم في بحثنا هذا تقدير معلمات التوزيع المركب (الاسي - ويبل) الذي يتميز بدالة تراكمية ضمنية $F_{ew}(x,a,b,\beta)$ وكما يلي[4]:

$$F(x,a,b,\beta) = \left(1 - e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}\right)$$

وبافتراض ان P_i تمثل تقدير للدالة التراكمية $F(x,a,b,\beta)$ نظرا لكون المعادلات الناتجة معقدة.[12]

حيث ان P_i مقدر لا معلمي يأخذ صيغ عديدة منها

$$P_i = \frac{i}{n+1} \quad . \ . \ . \quad (2-11)$$

$$P_i = \frac{i - {}^3/_8}{n + {}^1/_4} \quad . \ . \ . \quad (2-12)$$

$$(1 - P_i) = e^{-\beta(e^{ax_i^b}-1)} \quad . \ . \ . \quad (2-13)$$

وبأخذ Ln الى طرفي المعادلة $(13-2)$ ومساواتها الى الصفر

$$\ln(1-P_i) = -\beta(e^{ax_i^b}-1)$$

$$\ln(1-P_i) + \beta(e^{ax_i^b}-1) = 0 \quad . \ . \ . \quad (2-14)$$

وبتربيع المعادلة $(14-2)$ وأخذ المجموع نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-P_i)+\beta(e^{ax_i{}^b}-1)\right]^2=0 \quad . \ . \ . \ (2-15)$$

وللحصول على مقدرات التجزئة للمعالم a,b,B نتبع ما يلي :

$$\frac{dp.c}{db}=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-P_i)+\beta(e^{ax_i{}^b}-1)\right]\left[\beta e^{ax_i{}^b}\, ax_i{}^b\ \log(x_i)\right] \quad . \ . \ . \ (2-16)$$

$$\Longrightarrow\ \beta a\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^b}\, x_i{}^b\ \log(x_i)\left[\ln(1-P_i)+\beta(e^{ax_i{}^b}-1)\right]$$

$$=\ \beta a\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^b}\, x_i{}^b\ \log(x_i)\, ln(1-P_i)$$

$$+\beta^2 a\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^b}\, x_i{}^b\ \log(x_i)(e^{ax_i{}^b}-1)$$

$$\frac{dp.c}{d\hat{b}}=\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^{\hat{b}}}\, x_i{}^{\hat{b}}\ \log(x_i)\ln(1-P_i)+\beta\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^{\hat{b}}}\, x_i{}^{\hat{b}}\ \log(x_i)(e^{ax_i{}^{\hat{b}}}-1)=0\ \ . \ . \ . (2-17)$$

$$\therefore\ \beta\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^{\hat{b}}}\, x_i{}^{\hat{b}}\ \log(x_i)(e^{ax_i{}^{\hat{b}}}-1)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^{\hat{b}}}\, x_i{}^{\hat{b}}\ \log(x_i)\ln(1-P_i)\ldots(2-18)$$

المعادلة (18 – 2) هي معادلة لا خطية لا يمكن حلها بالطرائق الاعتيادية لابد من استعمال احدى الطرائق العددية لحلها باستخدام دالة Fsolve وهي خوارزمية موجودة في برنامج الماتلاب .

$$\frac{dp.c}{da}=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-P_i)+\beta(e^{ax_i{}^b}-1)\right]\left[\beta e^{ax_i{}^b}\ \ x_i{}^b\right] \quad . \ . \ . \quad (2-19)$$

$$\frac{dp.c}{da}=\beta\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i{}^b}\ \ x_i{}^b\left[\ln(1-P_i)+\beta(e^{ax_i{}^b}-1)\right]$$

$$=\beta\sum_{i=1}^{n} e^{\hat{a}x_i{}^b}\ \ x_i{}^b\ \ln(1-P_i)+\beta^2\sum_{i=1}^{n} e^{\hat{a}x_i{}^b}\ \ x_i{}^b\,(e^{\hat{a}x_i{}^b}-1)=0\ \ldots(2-20)$$

$$\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n} e^{\hat{a}x_i{}^b}\ \ x_i{}^b\ \ ln(1-P_i)=-\beta\sum_{i=1}^{n} e^{\hat{a}x_i{}^b}\ \ x_i{}^b\,(e^{\hat{a}x_i{}^b}-1) \quad . \ . \ . \ (2-21)$$

المعادلة (2-21) هي دالة غير خطية يصعب حلها بالطرق الاعتيادية ولابد من استعمال احدى الطرائق العددية لحلها والتي ذكرناها سابقا .

$$\frac{d\,p.c}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(1-P_i) + \beta(e^{a x_i^{b}} - 1)\right]\left(e^{a x_i^{b}} - 1\right) \quad ... \quad (2-22)$$

$$\frac{d\,p.c}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} (e^{a x_i^{b}} - 1)\left[\ln(1-P_i) + \beta(e^{a x_i^{b}} - 1)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} (e^{a x_i^{b}} - 1)\ \ln(1-P_i) + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{a x_i^{b}} - 1\right)^2 = 0 \quad ... \quad (2-23)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (e^{a x_i^{b}} - 1)\ \ ln(1-P_i)}{\sum_{i=1}^{n} (e^{a x_i^{b}} - 1)^2} \quad ... \quad (2-24)$$

2-3-2 طريقة المربعات الصغرى الموزونة

weighted least squares of Method (WLS)

تعد طريقة المربعات الصغرى الموزونة من الطرائق المهمة في عملية التقدير اذ تتميز هذه الطريقة بوجود عامل الوزن w_j وتستند هذه الطريقة على تصغير مجموع مربعات الاخطاء ويمكن صياغتها بالشكل الاتي [2].

$$wls = \sum_{j=1}^{n} w_j[F(x_j) - (\frac{j}{n+1})]^2 \quad ... \quad (2-25)$$

$$wls = \sum_{j=1}^{n} w_j[\left(1 - e^{-\beta(e^{a x j^{b}} - 1)}\right) - \left(\frac{j}{n+1}\right)]^2 \quad ... \quad (2-26)$$

علما ان w_j تساوي

$$W_j = \frac{1}{V(G(Y_j)} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{j(n-j+1)}$$

$$\frac{d\,wls}{da} = \sum_{j=1}^{n} w_j\left[\left(1 - e^{-\beta(e^{a x^{b}} - 1)}\right) - \left(\frac{j}{n+1}\right)\right](\beta x^{b} e^{-\beta\left(e^{a x^{b}} - 1\right) + a x^{b}}\ ) \quad ... (2-27)$$

$$\frac{d\,ols}{da} = \beta\sum_{j=1}^{n} w_j\ x^{b} e^{-\beta\left(e^{a x^{b}} - 1\right) + a x^{b}}\ \left[\left(1 - e^{-\beta(e^{a x^{b}} - 1)}\right) - (\frac{j}{n+1})\right]$$

$$\frac{d\,ols}{d\hat{a}} = \beta\sum_{j=1}^{n} w_j\ x^{b} e^{-\beta\left(e^{\hat{a} x^{b}} - 1\right) + \hat{a} x^{b}}\ \left(1 - e^{-\beta(e^{\hat{a} x^{b}} - 1)}\right)$$

$$-\beta\sum_{j=1}^{n} w_j x^b e^{-\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}x^b}\ \left(\frac{j}{n+1}\right) \ = 0 \qquad . . . \quad (2-28)$$

$$\Longrightarrow\ \beta\sum_{j=1}^{n} w_j\ x^b e^{-\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}X^b}\ -\beta\sum_{j=1}^{n} w_j x^b e^{-2\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}X^b}$$

$$=\beta\sum_{j=1}^{n} w_j\ x^b e^{-\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}X^b}\ (\frac{j}{n+1})$$

$$\Longrightarrow\sum_{j=1}^{n} w_j x^b e^{-\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}x^b}\ \left[1+e^{-\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}X^b}\ \right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n} w_j\ x^b e^{-\beta\left(e^{\hat{a}x^b}-1\right)+\hat{a}X^b}\ \left(\frac{j}{n+1}\right) \qquad . . . \quad (2-29)$$

المعادلة *(29-2)* هي دالة غير خطية يصعب حلها بالطرق الاعتيادية ولابد من استعمال احدى الطرائق العددية لحلها والتي تم ذكرها سابقا .

$$\frac{\mathrm{dwls}}{\mathrm{db}}=\sum_{j=1}^{n} w_j\left[\left(1-e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{j}{n+1}\right)\right](a\beta e^{-\beta(e^{ax^b}-1)+aX^b}\ \ x^b(\log(X)) \ . . . \quad (2-30)$$

$$\frac{dwls}{db}=a\beta\sum_{j=1}^{n} w_j e^{-\beta(e^{aX^b}-1)+aX^b}\ x^b(\log(X))\left[\left(1-e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}\right)-\left(\frac{j}{n+1}\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{dwls}}{\mathrm{db}}=a\beta\sum_{j=1}^{n} w_j\ e^{-\beta(e^{ax^{\hat{b}}}-1)+aX^{\hat{b}}}\ x^{\hat{b}}(\log(X))\left(1-e^{-\beta(e^{ax^{\hat{b}}}-1)}\right)$$

$$-a\beta\sum_{j=1}^{n} w_j\ e^{-\beta(e^{aX^{\hat{b}}}-1)+aX^{\hat{b}}}\ x^{\hat{b}}\ (\log(X))\ \ \frac{j}{n+1}=0 \qquad . . . \quad (2-31)$$

$$\Longrightarrow\sum_{j=1}^{n} w_j\ e^{-\beta(e^{ax^{\hat{b}}}-1)+ax^{\hat{b}}}\ \ x^{\hat{b}}(\log(x))-\sum_{j=1}^{n} w_j\ e^{-2\beta(e^{ax^{\hat{b}}}-1)+aX^{\hat{b}}}\ \ x^{\hat{b}}(\log(X))$$

$$=\sum_{j=1}^{n} w_j e^{-\beta(e^{ax^{\hat{b}}}-1)+ax^{\hat{b}}}\ \ x^{\hat{b}}(\log(x))\ \ \frac{j}{n+1} \qquad . . . \quad (2-32)$$

المعادلة (2-32) هي دالة غير خطية يصعب حلها بالطرق الاعتيادية ولابد من استعمال احدى الطرائق العددية لحلها والتي تم ذكرها سابقا.

$$\frac{dwls}{d\beta}=\sum_{j=1}^{n} w_j\left[\left(1-e^{-\beta\left(e^{ax^b}-1\right)}\right)-\left(\frac{j}{n+1}\right)\right]e^{-\beta\left(e^{ax^b}-1\right)}\ \left(e^{ax^b}-1\right)$$

$$\frac{dols}{d\hat\beta}=\sum_{j=1}^{n} w_j\ \left(e^{ax^b}-1\right)\left[\left(1-e^{-\hat\beta\left(e^{ax^b}-1\right)}\right)-\left(\frac{j}{n+1}\right)\right]=0\qquad ...\ (2-33)$$

$$\frac{\mathrm{dols}}{\mathrm{d}\hat\beta}=\sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_j}\ \mathrm{e}^{-\hat\beta\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{wj}\ \mathrm{e}^{-2\hat\beta\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)$$
$$-\sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_j}\ \mathrm{e}^{-\hat\beta\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)\left(\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{n}+1}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_j}\ \mathrm{e}^{-\hat\beta\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{w_j}\ \mathrm{e}^{-2\hat\beta\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_j}\ \mathrm{e}^{-\hat\beta\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{ax^b}}-1\right)\left(\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{n}+1}\right)\qquad ...\qquad (2-34)$$

المعادلة (2-34) هي دالة غير خطية يصعب حلها بالطرق الاعتيادية ولابد من استعمال احدى الطرائق العددية لحلها.

المبحث الثالث : الجانب التجريبي

1-3 **تمهيد** :

سنعرض في هذا المبحث اسلوب المحاكاة للحصول على بيانات تتبع التوزيع (الاسي_ويبل) ذو الثلاث معلمات وكيفية توليد البيانات مستخدمة في تقدير الدالة التراكمية للأنموذج الاحتمالي المركب والمقارنة بين طرائق التقدير المستعملة ومن ثم اختيار افضل طريقة التي تمتلك اقل متوسط مربعات خطا.

2-3 مفهوم المحاكاة :

تعرف المحاكاة بانها تقليد او تمثيل للواقع الحقيقي من خلال استخدام نماذج معينة للنظام ومتابعة تنفيذ التجربة للتعرف على مخرجات هذا النظام.[3] غالبا ما يستعمل اسلوب المحاكاة لمعرفة التغيرات التي طرأت على المشكلة عند تنفيذها عمليا، ان اسلوب المحاكاة يعطينا صورة واضحة ومعلومات مفيدة حول الواقع الذي يمثله فضلا عن تكرار التجربة اذ ان المدخلات المتغيرة في كل تجربة تعطي شرحا وافيا لطبيعة العملية الرياضية المستعملة ،وعليه يمكن ان نعرف اسلوب المحاكاة على انه (اسلوب يتم من خلاله ايجاد انموذج جديد مماثل للأنموذج الحقيقي.[1] ان من اهم الطرائق المستعملة في عملية المحاكاة هي طريقة(مونت كارلو) والتي تستعمل في توليد مشاهدات لمعظم التوزيعات الاحتمالية.

3-3 مراحل تجربة المحاكاة

تم كتابة برنامج المحاكاة بلغة (MATLAB) وطبق البرنامج على الحاسبة وفيما يلي اهم مراحل الخطوات المستعملة في كتابة برنامج المحاكاة

المرحلة الاولى

مرحلة اختيار القيم الافتراضية

تعد مرحلة اختيار القيم الافتراضية من المراحل الاساسية التي تعتمد عليها خطوات البرنامج وقد تم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:-

1-تم اختيار قيم افتراضية مختلفة لمعالم الانموذج الاحتمالي المركب وجرى تشكيل ثلاثة نماذج وكما مبين في الجدول الاتي :

الجدول (3-1)

القيم الافتراضية لمعالم الانموذج الاحتمالي المركب

Model	a	b	β
1	0.1	0.3	0.2
2	0.1	0.3	0.3
3	0.2	1	0.3

2- تم اختيار ثلاثة احجام مختلفة للعينة وكانت :

n=100,150,200

3- تم اختيار احدى عشر وقتا لتقدير دالة المعولية وكالاتي:

tr=0,,0.1,,0.2,,0.3,,0.4,,0.5,,0.6,,0.7,,0.8,,0.9,,1

4- كان تكرار كل تجربة مساويا الى (q=1000)

المرحلة الثانية ـ مرحلة توليد البيانات:

تم توليد بيانات عشوائية تخضع لتوزيع (الاسي – ويبل) المقترح بتطبيق طريقة التحويل المعكوس من خلال مساواة الدالة التجميعية للتوزيع المقترح بقيمة مشاهدة مولدة من قبل الحاسبة تتبع التوزيع المنتظم على الفترة [0,1] باستخدام الصيغة :

$$u = 1 - e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}$$

$$1 - u = e^{-\beta(e^{ax^b}-1)}$$

$$\log(1-u) = -\beta(e^{ax^b}-1)$$

$$e^{ax^b} = \frac{\beta - \log(1-u)}{\beta}$$

$$ax^b = \log[\frac{\beta - \log(1-u)}{\beta}]$$

$$x = \left[\frac{\log[\frac{\beta - \log(1-u)}{\beta}]}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$$

المرحلة الثالثة ـ مرحلة التقدير

في هذه المرحلة يتم اجراء عملية التقدير لمعلمات ودالة المعولية للأنموذج الاحتمالي المركب (الاسي – ويبل) باستخدام طرائق التقدير المذكورة انفا وسيتم ايجاد مقدرات لمعلمات ومعولية الانموذج الاحتمالي المركب .

المرحلة الرابعة – مرحلة المقارنة بين الطرائق

يتم في هذه المرحلة اجراء عملية المقارنة بين طرائق التقدير المختلفة لدالة المعولية بالاعتماد على متوسط مربعات الخطا(MSE)اذ كلما كانت قيمة (MSE)صغيرة كان المقدر هو الافضل وفق الصيغ الاتية :

$$MSE(\hat{a}) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}(\hat{a}i - a)^2$$

$$MSE(\hat{b}) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}(\hat{b}i - b)^2$$

$$MSE(\hat{B}) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}(\hat{B}i - B)^2$$

$$MSE(\hat{R}(t)) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}(\hat{R}(t) - R(t))^2$$

تحليل نتائج المحاكاة

سنتناول في هذا المبحث عرض وتحليل نتائج المحاكاة التي توصلنا الى افضل مقدر لتقدير دالة المعولية للانموذج الاحتمالي المركب (الاسي – ويبل) وذلك بالاعتماد على المقياس الاحصائي (MSE) وفيما يلي النتائج الموضحة في الجداول :-

جدول (3-2)

يبين قيم تقدير دالة المعولية بكافة الطرائق واحجام العينات للأنموذج الاول لتجربة عدد مكرراتها q=1000

Model	n	tr	real	P.C	WLS
M=1	100	0	1	0.98533	1
		0.1	0.9898	0.98597	0.98898
		0.2	0.9874	0.98469	0.98627
		0.3	0.9857	0.98307	0.98439
a=0.1		0.4	0.9843	0.98169	0.98296
		0.5	0.9832	0.98045	0.98179
b=0.3		0.6	0.9822	0.97931	0.98075
		0.7	0.9814	0.97831	0.97979
B=0.2		0.8	0.9806	0.97741	0.97886
		0.9	0.9799	0.97653	0.97792
		1	0.9792	0.97558	0.97701
	150	0	1	0.987	1
		0.1	0.9898	0.98575	0.98926
		0.2	0.9874	0.98365	0.98679
		0.3	0.9857	0.98279	0.98508

		0.4	0.9843	0.98272	0.98373
		0.5	0.9832	0.98188	0.98259
		0.6	0.9822	0.98136	0.9816
		0.7	0.9814	0.98091	0.98072
		0.8	0.9806	0.98014	0.97992
		0.9	0.9799	0.97928	0.97918
		1	0.9792	0.97846	0.9785
	200	0	1	0.992	1
		0.1	0.9898	0.98952	0.98929
		0.2	0.9874	0.98707	0.98682
		0.3	0.9857	0.98537	0.9851
		0.4	0.9843	0.98402	0.98372
		0.5	0.9832	0.98289	0.98249
		0.6	0.9822	0.9819	0.98134
		0.7	0.9814	0.98102	0.98029
		0.8	0.9806	0.98022	0.9794
		0.9	0.9799	0.97949	0.97864
		1	0.9792	0.97881	0.97796

جدول (3-3)

يبين قيم تقدير دالة المعولية بكافة الطرائق واحجام العينات للأنموذج الثاني لتجربة عدد مكرراتها q=1000

Model	n	tr	real	P.C	WLS
M=2	100	0	1	0.993	1
		0.1	0.9847	0.98417	0.98394
		0.2	0.9811	0.98061	0.98029
		0.3	0.9486	0.97813	0.97776
a=0.1		0.4	0.9766	0.97617	0.97577
		0.5	0.9749	0.97449	0.97409
b=0.3		0.6	0.9735	0.97299	0.97264
		0.7	0.9722	0.97158	0.97134
B=0.3		0.8	0.971	0.97022	0.97016
		0.9	0.9699	0.96894	0.96606
		1	0.9689	0.96779	0.96801
	150	0	1	0.993	1
		0.1	0.9847	0.98321	0.98402
		0.2	0.9811	0.97962	0.98042
		0.3	0.9486	0.97714	0.97791
		0.4	0.9766	0.97518	0.97592
		0.5	0.9749	0.97371	0.97424
		0.6	0.9735	0.97292	0.97279
		0.7	0.9722	0.97176	0.97149
		0.8	0.971	0.97063	0.97031

		0.9	0.9699	0.96958	0.96923
		1	0.9689	0.9686	0.96823
	200	0	1	0.995	1
		0.1	0.9847	0.98427	0.98422
		0.2	0.9811	0.98061	0.98059
		0.3	0.9486	0.97808	0.97807
		0.4	0.9766	0.97608	0.97608
		0.5	0.9749	0.97439	0.97441
		0.6	0.9735	0.97293	0.97296
		0.7	0.9722	0.97162	0.97166
		0.8	0.971	0.97044	0.97049
		0.9	0.9699	0.96935	0.96941
		1	0.9689	0.96834	0.96841

جدول (3-4)

يبين قيم تقدير دالة المعولية بكافة الطرائق واحجام العينات للأنموذج الثالث لتجربة عدد مكرراتها q=1000

Model	n	tr	real	P.C	WLS
M=3 a=0.2 b=1 B=0.3	100	0	1	0.993	1
		0.1	0.994	0.99128	0.99322
		0.2	0.9878	0.0.98543	0.98685
		0.3	0.9816	0.97914	0.9805
		0.4	0.9753	0.97373	0.97113
		0.5	0.9689	0.96729	0.96767
		0.6	0.9625	0.96073	0.96116
		0.7	0.9559	0.95455	0.95457
		0.8	0.9493	0.94822	0.94792
		0.9	0.9426	0.94146	0.94118
		1	0.9357	0.93455	0.93436
	150	0	1	0.998	1
		0.1	0.994	0.99381	0.99355
		0.2	0.9878	0.98789	0.98733
		0.3	0.9816	0.98173	0.98109
		0.4	0.9753	0.97546	0.97479
		0.5	0.9689	0.96909	0.96842

		0.6	0.9625	0.96262	0.96197
		0.7	0.9559	0.95606	0.95544
		0.8	0.9493	0.94939	0.94882
		0.9	0.9426	0.94264	0.94213
		1	0.9357	0.93578	0.93534
	200	0	1	0.997	1
		0.1	0.994	0.99213	0.99357
		0.2	0.9878	0.988	0.98735
		0.3	0.9816	0.98196	0.98112
		0.4	0.9753	0.95576	0.97483
		0.5	0.9689	0.96946	0.96847
		0.6	0.9625	0.96306	0.96205
		0.7	0.9559	0.95656	0.95552
		0.8	0.9493	0.94996	0.94892
		0.9	0.9426	0.94327	0.94225
		1	0.9357	0.93648	0.93548

جدول (3-5) يمثل قيم متوسط مربعات الخطأ لتقدير دالة المعولية للطريقتين ولحجام عينات مختلفة و لتجربه عدد تكرارها 1000

Model	n	P.C	W.L.S	Best
M=1	100	2.82E-05	2.13E-06	WLS
	150	1.94E-05	3.50E-07	WLS
	200	5.91E-06	7.30E-07	WLS
M=2	100	4.87E-06	6.41E-07	WLS
	150	5.43E-06	4.30E-07	WLS
	200	2.53E-06	2.38E-07	WLS
M=3	100	7.44E-06	1.36E-06	WLS
	150	9.64E-07	8.55E-07	WLS
	200	1.38E-06	1.55E-07	WLS

المبحث الرابع الاستنتاجات والتوصيات :

1 - الاستنتاجات :

وفقا لما تم بحثه في الجانب التجريبي توصل الباحث الى الاستنتاجات الاتية :

1- اظهرت النتائج التي تم الحصول عليها بان هناك تقارب بين مقدرات دالة المعولية للنماذج واحجام العينات ولكل طرائق التقدير .

2- اظهرت نتائج المحاكاة ان قيم دالة المعولية تتناقص بزيادة الزمن وهذا ينسجم مع النظرية الاحصائية والمتعلق بخصائص المعولية .

3– من خلال الجداول الخاصة بتقدير دالة المعولية تبين ان طريقة المربعات الصغرى الموزونة تأتي بالمرتبة الاولى من حيث الافضلية لأنها تمتلك اقل متوسط مربعات خطا لجميع النماذج واحجام العينات.

2 - التوصيات :

في ضوء ما توصل اليه الباحث في هذه الرسالة من استنتاجات يوصي بالاتي :

1- نوصي باستخدام طرائق تقدير اخرى غير الطرائق التي استخدمت بهذه الرسالة .
2- الاعتماد على طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير دالة المعولية للأنموذج الاحتمالي المركب بدلا من طريقة المقدرات التجزيئية والتي تم ذكرها بالجانب النظري .
3- يوصي الباحث بتطبيق الانموذج الاحتمالي المركب (الاسي- ويبل) في جوانب علمية مثل الجانب الطبي والهندسي وغيره.

المصادر العربية :

1: الجميلي ، صبا صباح احمد .(2011) " مقارنة مقدرات بيز لدالة المعولية لأنموذج ويبل للفشل باستعمال دوال خسارة مختلفة مع تطبيق عملي " اطروحة دكتوراه – جامعة بغداد..
2: جاسم . خضر نصيف (2012) "مقارنة تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي المختلط مع تطبيق عملي " ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .
3: عويد ، غزوان رفيق (2012) ،"مقارنة مقدرات بيز لمعلمة ودالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع رالي باستعمال دول خسارة متزنة وغير متزنة " رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد – الجامعة المستنصرية.
4: نعمان ، انعام عبد الرحمن (2012) " تصميم خطط عينات القبول للشركة العامة للصناعات الالكترونية باستخدام التوزيع الاسي " اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

المصادر الاجنبية:

5: Akinsete . A., Famoy. F., and Lee.c.(2008)."The beta – pareto distribution". statistics,vol.42.No.6,pp.547-563.
6: AL-Kadim .k. A. and . Boshi. M. A.(2013) "Exponential –Pareto Distribution " . Mathematical Theory and Modeling., Vol . 3, No.5 , pp.135-146.
7: Ayman. A, Felix . Famoye, and Carl . L. (2013) " Weibull – Pareto Distribution and Its Applications " Communication and Statistics-Theory and Methods. Vol . 42, No.9, PP.1673- 191.
8: Barreto –Souza.W;Santos.A.H.S;and Cordeiro.G.M.(2009) " The beta generalized exponential distribution" Statistics. Vol.42.No.6.PP.547-563.
9: Castellares . A, Montenegero. L.C. and Gauss.M.C.(2011)" The beta log- normal distribution" Journal of Statistical Computation and Simulation. Vol.2011. PP.1-26.
10:Carl .L ; Felix. F ; and Olugbenga .O. (2007) " Beta –Weibull Distribution: Some Properties and Applications to Censored Data" Journal of Modern Applied Statitisticl Methods. Vol .6.No.1. PP.173-186
11: Cordeiro.G.M ;Lemonte.A.J;(2011) " The beta – half – Cauchy Distribution. Journal of probability and Statistic ; Vol 2011 ; PP.1-18.
12: Gupta, R.D., and Kundu, D., (2000), Generalized Exponential Distribution: different method of estimation, Journal of statistical

computation and simulation, vol.30, no.4, pp 315-338

13: Lingji .K ; Catl.L ; and Sepanski .J.H. (2007) " On the Properties of beta – Gamma Distribution "Journal of Modern Applied Statitisticl Methods. Vol .6.No.1.PP.187-211.

14: Nadarajah .S; and Kot.S; (2004) " The beta Gumbel distribution " Math .probability .Eng; Vol.10 .PP.323-332.

15: Paranaiba. P.F ,Ortega. M.M.E, Cordeiro . G.M, and Pescim.R.R. (2010) "The beta Burr XII distribution with application to lifetime data " Computational Statistics and Data Analysis . Vol. 2010 . pp 1-20.

16:Tahir.H.,Cordeiro.G.M.,Ayman.A.,Mansoor.M.and.Zubair.M.(2014) "A New Weibull – Pareto Distribution : Properties and Applications" Communications in Statistics – Simulation and Computation. Vol.2011, pp.1-26