

حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة المقام ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

م.م. فاطمة عبد الباري حسين / رئاسة جامعة بغداد

المستخلص

يعد إستخدام الطرق والاساليب العلمية الحديثة من المواضيع المهمة في حل العديد من المشاكل التي تواجه بعض القطاعات منها الصناعية - الخدمية - الصحية ودائماً ما يلجأ الباحث الى أستعمال الطرائق العلمية الحديثة التي تمتاز بالدقة والوضوح والسرعة في الوصول الى الحل الأمثل وبالوقت نفسه تكون سهلة من حيث الفهم والتطبيق .

في هذا البحث تمت دراسة مقارنة بين طريقتين من طرائق الحل لنماذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وهي : طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper وطريقة تقييد دالة المقام وذلك من خلال تطبيقهما على معمل المدافئ النفطية والطباخات الغازية ، حيث تبين بعد التوصل الى النتائج النهائية أن طريقة تقييد دالة المقام تعد الأفضل من حيث السهولة بالتطبيق وكذلك السرعة في خطوات الحل للوصول الى الحل الأمثل فضلاً عن كونها لا تحتاج الى إضافة متغير عشوائي ولا الى إضافة قيد جديد الى الأنموذج كما هي الحال بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper

المصطلحات الرئيسية للبحث / البرمجة الكسرية الخطية (LFP) - البرمجة الخطية (LP) - طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper - طريقة تقييد دالة المقام - طريقة السمبلكس - طريقة M العظمى .



مجلة العلوم الاقتصادية
والإدارية
العدد ٩٤ المجلد ٢٢
الصفحات ٤٨٠ - ٤٩٣



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

١- المقدمة

تعتبر الأساليب الكمية أو ما يعرف ببحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة في مجالات متعددة منها الإدارة ، حيث أنها تعتمد على مجموعة من الطرائق والأساليب العلمية التي تساعد متخذ القرار على إختيار القرار الأمثل لحل المشكلة من بين الحلول المتعددة لها وذلك بالاستعانة بأدوات وأساليب كمية تساعد على إتخاذ القرار الأمثل ومن هذه الأدوات أسلوب البرمجة الكسرية الخطية (LFP) .^[٤]

تعد مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) من المسائل المهمة التي تعنى وتهتم بالعديد من المسائل منها تخطيط الإنتاج ، الحسابات المالية ، التخطيط المؤسسي ، الرعاية الصحية ، وغيرها .^[١٨] وهي حالة خاصة من مسائل البرمجة الأمثلية حيث أن دالة الهدف فيها تكون نسبة بين دالتين خطيتين (بسط ومقام) وقيود المسألة عبارة عن معادلات ومتراجحات خطية ، وقد حظي هذا النوع من المسائل على الكثير من الأهتمام والبحث .^[٢٠]

نشأت (LFP) عندما ظهرت الحاجة الضرورية والملحة لتحسين الكفاءة لبعض الأنشطة مثلاً الأرباح المكتسبة من قبل شركة لكل وحدة واحدة من نفقات العمل وكذلك تكلفة الإنتاج لكل وحدة من السلع المنتجة ، واتخاذ القرار الأمثل كأن يكون تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف أو زيادة الطاقة الإنتاجية وذلك لأن القرار النهائي يتخذ على أثر قرارات سابقة للمشكلة ، الاشكالية الوحيدة في مسألة (LFP) هي أنه حتى الآن لم يتم تصنيع حزمة برامج خاصة ومتقدمة لحل وتدريب مسألة (LFP) .^{[١٠]، [٧]}

هناك العديد من طرائق الحل لمسألة (LFP) من بينها طريقة التحويلات الخطية التي أقترحها وطورها كلاً من الباحثين Charnes & Cooper عام (١٩٧٣-١٩٦٢) .^{[٩]، [٨]} أما في العام (١٩٦٤) قام الباحث Swarup بادخال طريقة خوارزمية النوع المبسط لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية والتي تعتمد على طريقة السمبلكس .^[١٥]

في عام (١٩٧٢) قام الباحثين Bitran & novae بإيجاد طريقة مقترحة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وقد حظيت هذه الطريقة على قبول واسع في حينها .^[١٢] في العام (١٩٨٧) استخدم عدد من الباحثين خوارزمية التقريب لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) .^[١٩]

أوجد كل من الباحثين Lai & Liu في العام (١٩٩٩) الشرط الضروري والكافي في حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) .^[١٣]

أقترح العالم S.F.Tantawy في عام (٢٠٠٨) طريقة تكرارية لحل مسائل (LFP) ، حيث بين بأن هذه الطريقة بالإمكان أن تستخدم في تحليل الحساسية عندما يتم إدخال معلمة عددية في معاملات دالة الهدف .^[٢١]

في العام (٢٠١١) أستخدم الباحث رشيد بشير طريقة لاكرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وتطويرها من خلال ايجاد صيغ رياضية يمكن بواسطتها ايجاد الحل مباشرة دون استخدام الاشتقاق التفاضلية المعقدة .^[٥]

أما في العام (٢٠١٣) قام كل من الباحثين احمد محمود وندى يوسف بايجاد الحل الامثل لمسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) باستعمال خوارزمية جينية مقترحة وتطبيقها على معمل الغزل والنسيج في الموصل .^[١١]

ولكن كل الطرائق التي تم ذكرها بعد تحليلها تبين أنها تمتاز بالأسهاب ومطولة جداً وتستغرق وقت طويل في الحل .^[١٦]

هذا البحث يتناول استعمال طريقة تقييد دالة المقام على معمل المدافىء النفطية والطباخات الغازية ومقارنة النتائج مع نتائج الحل بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper ، كما سيتم توضيحه في الجانب النظري والجانب التطبيقي .

٢- مشكلة البحث

يسعى مدير المعمل الى رفع نسبة الانتاج نسبة لتكاليف الصنع في ظل الظروف الحالية المتمثلة بقلّة الطلب على المدافىء في موسم الصيف وذلك من خلال تطبيق الطرائق العلمية الحديثة التي تساعد على اتخاذ القرار الصحيح .



٣- الهدف من البحث

يهدف البحث الى ايجاد الحل الامثل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) وذلك بأستعمال طريقة تقييد دالة المقام وطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper ومقارنة نتائج الحل للطريقتين وبيان ايهما أفضل من حيث العمليات الحسابية وجهد الوقت .

٤- الجانب النظري

1-4- الصيغة العامة لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) [١٠]

وتكون بالشكل الآتي :

$$Q(X) = \frac{P(X)}{D(X)} = \frac{\sum_{j=1}^n P_j X_j + P_0}{\sum_{j=1}^n d_j X_j + d_0} \quad \text{--- Max (Min)} \quad \dots (1)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j (\leq = \geq) b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots (2)$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots (3)$$

Where $D(x) > 0 \quad \forall X \in S$

$S = \{ X \in R^n : Ax \leq b, X \geq 0 \}$ مجموعة غير خالية ومقيدة

حيث أن

X_j : متجه متغيرات القرار لدالة الهدف وقيود النموذج الرياضي

P_j : معاملات متغيرات القرار في دالة هدف البسط

d_j : معاملات متغيرات القرار في دالة هدف المقام

P_0 : الحد المطلق في دالة هدف البسط

d_0 : الحد المطلق في دالة هدف المقام

a_{ij} : معاملات متغيرات القرار لقيود المسألة

b_i : القيمة المطلقة (الموارد المتاحة) لقيود المسألة

2-4- طريقة التحويلات الخطية [١٠] [١١] [١٢] لـ Charnes & Cooper

في عام ١٩٦٢ بين كل من العالمين A.Charnes & W.W.Cooper أن أي مسألة برمجة كسرية خطية (LFP) مع مجموعة محددة من الحلول الممكنة بالإمكان تحويلها الى مسألة برمجة خطية (L.P) من خلال الخطوات الآتية :

٤-٢-١- خطوات الحل

١- إدخال متغيرات جديدة يرمز لها بالرمز (t_j) للمسألة الكسرية الموضحة بالمعادلات (١) - (٣) وتكون بالصيغة

$$t_j = \frac{X_j}{D(X)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

حيث أن

$$t_0 = \frac{1}{D(X)}$$

وأن

$$D(X) = \sum_{j=1}^n d_j X_j + d_0 > 0$$

٢- بإستخدام المتغيرات الجديدة (t_j) نستطيع كتابة دالة الهدف العامة $Q(X)$ المبينة في المعادلة رقم (١) بالصيغة الآتية :

$$L(t) = \sum_{j=1}^n P_j t_j \quad \text{---> Max (Min)}$$



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

٣- لكي تكتمل العلاقة بين المتغيرات الأصلية (X_j) والمتغيرات الجديدة (t_j) يجب أن نضرب المعادلة الجديدة ويكون بالصيغة الآتية :

$$\sum_{j=1}^n dj tj = 1$$

٤- نضرب كل قيود المسألة الكسرية المشار إليها بالمعادلتين (٢) و (٣) بالمقدار $\frac{1}{D(X)}$ لنحصل على القيود الجديدة الآتية :

$$-b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} tj (\leq = \geq) 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$t_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

فتصبح المسألة الخطية بالصيغة الآتية :

$$L(t) = \sum_{j=1}^n Pj tj \longrightarrow \text{Max (Min)} \dots (٤)$$

Subject to

$$-b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} tj (\leq = \geq) 0, i = 1, 2, \dots, m \dots (٥)$$

$$\sum_{j=1}^n dj tj = 1 \dots (٦)$$

$$t_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \dots (٧)$$

٥- يتم حل المسألة الخطية المشار إليها بالمعادلات من (4) _ (7) بالطرائق الرياضية المختلفة الخاصة بحل مسائل البرمجة الخطية وإيجاد قيم كل من المتغيرات (t_j) ومن ثم إيجاد قيم المتغيرات الأصلية (X_j) من خلال المعادلة الآتية:

$$X_j = \frac{t_j}{t_0}$$

٤-٣- طريقة تقييد دالة المقام ^{[١٧]، [١٦]، [٢]}

تستخدم هذه الطريقة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) من خلال تكوين مسألتين خطيتين من المسألة الكسرية المعطاة الأولى لدالة هدف البسط مع قيود المسألة الكسرية والثانية لدالة هدف المقام ولنفس القيود ، وبإيجاد الحل الأمثل للمسألة الخطية الأولى يتم الاستفادة من جدول الحل الأمثل لها يجعله الجدول الأولي للمسألة الثانية والاستمرار بخطوات الحل المبين تفصيلها لاحقاً لحين الوصول الى الحل الأمثل للمسألة الكسرية .

تمتاز هذه الطريقة بأنها تعتمد فقط وبشكل أساسي على الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) .

٤-٣-١ خطوات الحل

١- نكون مسألتين خطيتين من المسألة الكسرية المعطاة والموضحة بالمعادلات من (1)_ (3) نطلق على الأولى (N) أما المسألة الثانية (M) وكما مبين فيما يأتي :

$$(N) \quad \text{Max (Min) } P(X) = \sum_{j=1}^n Pj Xj + P0$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Xj (\leq = \geq) bi, i = 1, 2, \dots, m$$

$$Xj \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

والمسألة الثانية

$$(M) \quad \text{Min (Max) } D(X) = \sum_{j=1}^n d_j X_j + d_0$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j (\leq = \geq) b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

٢- نجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الأولى (N) من خلال استخدام الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) ، نفرض أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو (X^0) وأن

$$\text{Max} Q(X^0) = Q^0$$

٣- نستخدم جدول الحل الأمثل لمسألة الخطية الأولى (N) بوصفه جدول الحل الأولي للمسألة الخطية الثانية (M) ونستمر بالحل بطريقة السمبلكس لإيجاد سلسلة من الحلول الممكنة الأساسية المحسنة (X_n) للمسألة (M) وكذلك نجد قيم Q في كل خطوة .

$$Q(X_k) \leq Q(X_{k+1}) \quad \forall K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{إذا كانت}$$

$$Q(X_n) \geq Q(X_{n+1}) \quad \text{for some } n \quad \text{وكانت}$$

نتوقف عن العمليات الحسابية ويصبح (X_n) هو الحل الأمثل للمسألة الكسرية Q ، وأن

$$\text{Max } Q(X) = Q(X_n)$$

$$Q(X_k) \leq Q(X_{k+1}) \quad \forall K = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{إذا كانت} \quad \text{٥-}$$

$Q(X_{k+1})$ و (X_{n+1}) هو الحل الأمثل للمسألة الخطية الثانية (M) لبعض n ، نتوقف عن العمليات الحسابية ويصبح (X_{n+1}) هو الحل الأمثل للمسألة الكسرية Q ، وأن

$$\text{Max } Q(X) = Q(X_{n+1})$$

٤-٤-٤ - طريقة المبسطة (طريقة السمبلكس)

تعد طريقة السمبلكس من أهم وأشمل طرق حل نماذج البرمجة الخطية لانه يمكن بواسطتها حل جميع نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات فيها.^[١]

ان الوصول الى الحل النهائي الأمثل للمشكلة المتمثل في تعظيم دالة الهدف أو تصغيره عند استخدام هذه الطريقة يتم على خطوات نظامية متتابعة تبدأ بالحل الممكن الأولي (An initial Basic feasible solution) مروراً بالحل الأفضل لغاية الوصول الى الحل الأمثل (optimal solution).^[٤]

حيث يتم تحويل الانموذج الرياضي الى الصيغة القانونية وذلك بإضافة المتغيرات الوهمية (slack Variable) ويرمز لها بالرمز (S_i) بعدها يصمم جدول السمبلكس حيث ان المرحلة الأولى منه تكون عن طريق تثبيت البيانات من الصيغة القياسية للانموذج الرياضي الخطي ، ويتم المباشرة في الحل الممكن اذا استوفى هذا الجدول شرط $b_i \geq 0$ أي ان جميع المتغيرات الأساسية (S_i) غير سالبة ، وبعدها يتم تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الخارج منه باتباع عدد من الخطوات بالامكان الأطلاع عليها بمراجعة المصدر رقم [٢] و [٣] .

٤-٥-٤ - طريقة Big- M

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون قيود المسألة الخطية مختلطة أي $\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j (\leq = \geq) b_i$

حيث يتم الاستعانة بمتغيرات أخرى تسمى المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variable) ويرمز لها بالرمز (R_i) وتظهر في دالة الهدف بمعاملات $-M$ اذا كانت دالة الهدف من نوع Max ومعاملات $+M$ اذا كانت دالة الهدف من نوع Min ، ويتم تحديد المتغير الداخل للأساس بأخذ أكبر معامل موجب لـ M ، أما المتغير الخارج من الأساس فهو الذي يقابل أقل نسبة لقسمة عناصر عمود الحل على عناصر عمود المتغير



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

الادخال في حال كون دالة الهدف من نوع Min ، والعكس في حالة كون دالة الهدف من نوع Max . ويستمر بخطوات الحل لحين التخلص من كل المتغيرات الاصطناعية [١١]، [١٢]

٥- الجانب التطبيقي

تم اخذ بيانات معمل المدافيء النفطية والطباخات الغازية / بغداد / الزعفرانية ولمدة اسبوع عمل ، حيث ان المعمل ينتج نوعين من المنتجات (المدافيء - الطباخات) بأستعمال ثلاثة عناصر انتاجية هي (المواد الأولية - اليد العاملة - ساعات العمل) والتمتاع منها مبين في الجداول الاتي ، كما وان هناك تكلفة انتاج لكل وحدة منتجة وتكلفة اضافية ، علماً ان المعمل يعمل بنظام الشفت الواحد وان ساعات العمل اليومية (٦ ساعات) أما اجمالي عدد العاملين في المعمل (٩٥ عامل) موزعين كالاتي (٥٥ عامل لانتاج المدافيء - ٤٠ عامل لانتاج الطباخات) .

جدول رقم (١-5) المواد الاولية اللازمة لانتاج وحدة واحدة

ت	المادة الاولية	وحدة القياس	الكمية اللازمة لانتاج وحدة واحدة من		الكمية المتاحة
			المدافيء	الطباخات	
١-	طاقم مدفأة	عدد	١	-	٢٠٠
٢-	طاقم طبخ	عدد	-	١	١١٠
٣-	حديد ستنلس ستيل	كغم	١.٣	٢	٦٠٠
٤-	باودر طلاء	كغم	٠.٣١	٠.٢	٩٠

اما الوقت المستغرق لانتاج وحدة واحدة من كل منتج يتم حسابه وفقاً لمسار الانتاج المبين في الجدول الآتي :

جدول رقم (٢-5) مسار الانتاج والوقت اللازم لانتاج وحدة واحدة

ت	مسار الانتاج	نوع المنتج	وحدة القياس	المدفأة	الطباخ
١-	قسم الكابسات	ساعة	ساعة	١	-
٢-	قسم اللحام المنقط	ساعة	ساعة	٠.٥	٠.٥
٣-	قسم الطلاء	ساعة	ساعة	٢	٠.٢٥
٤-	قسم التجميع	ساعة	ساعة	١	٠.٧٥
٥-	قسم الفحص النهائي والتغليف	ساعة	ساعة	٠.٥	٠.٥
	مجموع الاوقات	ساعة	ساعة	٥	٢

يتم حساب الوقت المتاح للعاملين في المعمل من خلال المعادلة الآتية :

الوقت المتاح = عدد العاملين × عدد ايام العمل × ساعات العمل في اليوم × السماحات

$$= ٩٥ \times ٥ \times ٦ \times ٠.٨٥$$

$$= ٢٤٢٣ ساعة$$



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

أما كلفة التصنيع وسعر البيع لكل منتج مبينة في الجدول ادناه ، علماً ان هناك كلفة اضافية تشمل تجهيزات العاملين ووقود تبلغ قيمتها ٤٩ الف دينار .

جدول رقم (٣-٥) الكلفة الكلية وسعر البيع لكل وحدة واحدة

ت	نوع المنتج	وحدة القياس	الكلفة الكلية (ب الف دينار)	سعر البيع (ب الف دينار)
١-	مدفأة	عدد	١٣٥	١٥٠
٢-	طباخ	عدد	٩٠	١٠٠

١-٥- صياغة الإنموذج الرياضي للمسألة

نفرض أن

X_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المدافئ

X_2 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الطباخات

الغرض من هذا البحث هو تعظيم الكمية المنتجة نسبة الى التكاليف وهذا يعني أن دالة هدف البسط تمثل

$$\text{Max } P(X) = X_1 + X_2, \text{ أما دالة هدف المقام تمثل تقليل الكلفة } \text{Min } D(X) = 135 X_1 + 90 X_2 + 49$$

وعليه فإن الأنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) يكون بالشكل الآتي :

$$\text{Max } Q(X) = \frac{X_1 + X_2}{135 X_1 + 90 X_2 + 49}$$

Subject to

$$X_1 \leq 200$$

$$X_2 \leq 110$$

$$1.3 X_1 + 2 X_2 \leq 600$$

$$0.31 X_1 + 0.2 X_2 \leq 90$$

$$5 X_1 + 2 X_2 \leq 2423$$

$$55 X_1 + 40 X_2 \leq 95$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

قيود المواد الأولية

قيود ساعات العمل

قيود اليد العاملة

قيود عدم السالبة

٢-٥- حل الإنموذج الرياضي لمشكلة البحث بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper

بعد تطبيق خطوات الحل بطريقة التحويلات الخطية والتي تم إيضاح خطواتها بالفقرة (٢-٤) على إنموذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية الذي تم بناءه بالفقرة (١-٥) ، تم التوصل الى إنموذج البرمجة الخطية (LPP) الآتي :

$$\text{Max } L(t) = t_1 + t_2$$

Subject to

$$t_1 - 200 t_0 \leq 0$$

$$t_2 - 110 t_0 \leq 0$$

$$1.3 t_1 + 2 t_2 - 600 t_0 \leq 0$$

$$0.31 t_1 + 0.2 t_2 - 90 t_0 \leq 0$$

$$5 t_1 + 2 t_2 - 2423 t_0 \leq 0$$

$$55 t_1 + 40 t_2 - 95 t_0 \leq 0$$

$$135 t_1 + 90 t_2 + 49 t_0 = 1$$

$$t_1, t_2, t_0 \geq 0$$



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) باستعمال طريقة تقييد دالة
ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

الآن نكون جدول الحل الأولي باستعمال طريقة السمبلكس لمسألة البرمجة الخطية أعلاه ، وكما في الشكل الآتي :

جدول رقم (5-2-1) الحل الأولي للمسألة الخطية بطريقة (Big - M)

		t ₁	t ₂	t ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	R	
P _j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	R.H.S
0	S ₁	1	0	-200	1	0	0	0	0	0	0	0
0	S ₂	0	1	-110	0	1	0	0	0	0	0	0
0	S ₃	1.3	2	-600	0	0	1	0	0	0	0	0
0	S ₄	0.31	0.2	-90	0	0	0	1	0	0	0	0
0	S ₅	5	2	-2423	0	0	0	0	1	0	0	0
0	S ₆	55	40	-95	0	0	0	0	0	1	0	0
-M	R	135	90	49	0	0	0	0	0	0	1	1
	L-P _j	-1-135M	-1-90M	-M	0	0	0	0	0	0	0	-M

وبحل مسألة البرمجة الخطية في الجدول (5-2-1) باستعمال طريقة (Big - M) ، نصل الى الحل الأمثل في الجدول التكراري الخامس وكما مبين في الجدول رقم (5-2-2) ادناه :

جدول رقم (5-2-2) الحل الأمثل للمسألة الخطية بطريقة (Big - M)

		t ₁	t ₂	t ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	R	
P _j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	R.H.S
1	t ₂	1.4767	1	0	0	0	0	0	0	0.0047	0.0090	0.0090
0	S ₂	3.2331	0	0	0	0	1	0	0	-0.9466	0.4096	0.4096
0	S ₃	24.0365	0	0	0	1	0	0	0	-5.1473	2.2655	2.2655
0	S ₄	3.8681	0	0	0	0	0	1	0	-0.7716	0.3407	0.3407
0	S ₅	105.7907	0	0	0	0	0	0	1	-20.7581	9.2036	9.2036
0	t ₀	0.0428	0	1	0	0	0	0	0	-0.0086	0.0038	0.0038
0	S ₁	9.5633	0	0	1	0	0	0	0	-1.7127	0.7612	0.7612
	L-P _j	0.4767	0	0	0	0	0	0	0	0.0047	0.0090	0.0090
	Big- M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

من الجدول رقم (5-2-2) أعلاه نلاحظ أن الحل الأمثل للمسألة بالشكل الآتي :

$$t_0 = 0.0038$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 0.0090$$

$$L(t) = 0.0090$$

من خلال النتائج المذكورة آنفاً نستطيع إيجاد الحل الأمثل لإنموذج المسألة الكسرية Q(X) باستخدام العلاقة الرياضية الآتية :

$$X_j = \frac{t_j}{t_0}, j = 1, 2$$

$$X_1 = \frac{t_1}{t_0} \longrightarrow X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{t_2}{t_0} \longrightarrow X_2 = 2.3684$$

$$\longrightarrow \text{Max } Q(X) = \frac{X_1 + X_2}{135 X_1 + 90 X_2 + 49}$$

$$\text{Max } Q(X) = 2.3684/262.156$$

$$= 0.00903$$



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LPP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

3-5- حل الإنموذج الرياضي لمشكلة البحث باستخدام طريقة تقييد دالة المقام

بعد تطبيق خطوات الحل بطريقة تقييد دالة المقام والتي تم إيضاح خطواتها بالفقرة (4-3) على إنموذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية الذي تم بناءه بالفقرة (5-1) ، تم الحصول على إنموذجين للبرمجة الخطية (LPP) هما (N) و (M) وكما مبين أدناه :

$$(N) \quad \text{Max } P(X) = X_1 + X_2$$

Subject to

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 200 \\ X_2 &\leq 110 \\ 1.3 X_1 + 2 X_2 &\leq 600 \\ 0.31 X_1 + 0.2 X_2 &\leq 90 \\ 55 X_1 + 40 X_2 &\leq 95 \\ 5 X_1 + 2 X_2 &\leq 2423 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

قيود المواد الأولية
قيد اليد العاملة
قيد ساعات العمل
قيد عدم السالبة

$$(M) \quad \text{Min } D(X) = 135 X_1 + 90 X_2 + 49$$

Subject to

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 200 \\ X_2 &\leq 110 \\ 1.3 X_1 + 2 X_2 &\leq 600 \\ 0.31 X_1 + 0.2 X_2 &\leq 90 \\ 55 X_1 + 40 X_2 &\leq 95 \\ 5 X_1 + 2 X_2 &\leq 2423 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

قيود المواد الأولية
قيد اليد العاملة
قيد ساعات العمل
قيد عدم السالبة

وبحل المسألة الخطية الأولى (N) بأستعمال طريقة السمبلكس ، حيث أن جدول الحل الأولي مبين فيما يأتي :

جدول رقم (5-3-1) الحل الأولي للمسألة الخطية الأولى (N) بطريقة السمبلكس

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6		
P_j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S_1	1	0	1	0	0	0	0	0	200	200
0	S_2	0	1	0	1	0	0	0	0	110	-
0	S_3	1.3	2	0	0	1	0	0	0	600	461.53
0	S_4	0.31	0.2	0	0	0	1	0	0	90	290.32
0	S_5	55	40	0	0	0	0	1	0	95	1.73
0	S_6	5	2	0	0	0	0	0	1	2423	484.6
	$P-P_j$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	

نلاحظ أن المتغير S_5 سيغادر الأساس والمتغير X_1 سيدخل الأساس ، وبالإستمرار بخطوات الحل بطريقة السمبلكس نصل الى جدول الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الأولى (N) والذي يمثل الجدول التكراري الثالث وكما مبين فيما يأتي :



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة
ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

جدول رقم (٥-3-2) الحل الأمثل للمسألة الخطية (N) الأولى بطريقة السمبلكس

		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆		
P _j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	200	
0	S ₂	-1.3750	0	0	1	0	0	-0.0250	0	107.6250	
0	S ₃	-1.4500	0	0	0	1	0	-0.0500	0	595.2500	
0	S ₄	0.0350	0	0	0	0	1	-0.0050	0	89.5250	
1	X ₂	1.3750	1	0	0	0	0	0.0250	0	2.3750	
0	S ₆	2.2500	0	0	0	0	0	-0.0500	1	2418.2500	
	P-P _j	0.3750	0	0	0	0	0	0.0250	0	2.3750	Q ₀ = 0.00904

الآن نعد أن الجدول رقم (٥-٣-٢) هو جدول الحل الأولي للمسألة الخطية الثانية (M) وكما مبين في الجدول الآتي :

جدول رقم (٥-3-٣) الحل الأولي للمسألة الخطية الثانية (M) بطريقة السمبلكس

		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆		
d _j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	200	-
0	S ₂	-1.3750	0	0	1	0	0	-0.0250	0	107.6250	-
0	S ₃	-1.4500	0	0	0	1	0	-0.0500	0	595.2500	-
0	S ₄	0.0350	0	0	0	0	1	-0.0050	0	89.5250	-
90	X ₂	1.3750	1	0	0	0	0	0.0250	0	2.3750	95
0	S ₆	2.2500	0	0	0	0	0	-0.0500	1	2418.2500	-
	d _j - D	11.25	0	0	0	0	0	-2.25	0	262.75	Q ₀ = 0.00904

نلاحظ أن المتغير S₅ سيدخل الى الأساس والمتغير X₂ سيغادر الأساس ، ويكون الجدول التكراري الأول للمسألة الخطية الثانية (M) وكما مبين في الجدول الآتي :

جدول رقم (٥-3-٤) الجدول التكراري الأول للمسألة الخطية الثانية (M) بطريقة السمبلكس

		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆		
d _j	Basis	1	1	0	0	0	0	0	0	R.H.S	Ratio
0	S ₁	1	0	1	0	0	0	0	0	200	
0	S ₂	0	1	0	1	0	0	0	0	110	
0	S ₃	1.3	2	0	0	1	0	0	0	600	
0	S ₄	0.31	0.2	0	0	0	1	0	0	90	
0	S ₅	55	40	0	0	0	0	1	0	95	
0	S ₆	5	2	0	0	0	0	0	1	2423	
	d _j - D	135	90	0	0	0	0	0	0	476.5	Q ₀ = 0



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

الآن نلاحظ أن $Q_0 > Q_1$ ومن خلال الخطوة رقم (٤) من خطوات الحل بطريقة تقييد دالة المقام . سنتوقف عن العمليات الحسابية ويصبح الحل الأمثل للمسألة الكسرية الخطية Q كما يأتي :

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 2.3750$$

$$\text{Max } Q(X) = 0.00904$$

$$P(X) = 2.3750$$

$$D(X) = 262.75$$

$$Q(X) = 0.00904$$

أي أن قيمة دالة البسط

أما قيمة دالة المقام

وأن نسبة كمية الانتاج للتكاليف

٦- الإستنتاجات والتوصيات

١-٦- الإستنتاجات

- ١- من خلال النتائج التي تم التوصل إليها بالطريقتين تبين أن على صاحب المعمل أن ينتج في الوقت الراهن منتج واحد وهو الطباخات .
- ٢- بعد حل الأنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بطريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper وجد أن هناك متغير إضافي وكذلك قيد إضافي في الأنموذج الخطي ، بينما في حالة تطبيق طريقة تقييد دالة المقام فإن الأمر لا يستدعي سوى فصل دالة الهدف الكسرية الى دالتين خطيتين وبنفس قيود المسألة الأصلية .
- ٣- عند تطبيق طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper فإن متغيرات القرار (X_j) تتحول الى متغيرات أخرى (t_j) وكذلك هناك متغير عشوائي (t_0) يضاف لكل من دالة الهدف وجميع قيود المسألة الخطية بحيث تتحول كل من دالة هدف وقيود المسألة الكسرية الى صيغة مختلفة تماماً عن صيغتها الأصلية ، بينما في تطبيق طريقة تقييد دالة المقام فإن متغيرات القرار وكذلك دالة الهدف للبسط والمقام تبقى كما هي عليه الأنموذج الكسري الأصلي ولكن يتم فصلهما الى إنموذجين خطيين .
- ٤- نلاحظ أن الوصول الى الحل الأمثل لمشكلة البحث من خلال تطبيق طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper تطلب خمسة جداول تكرارية وكذلك تطلب تطبيق عدد من العلاقات الرياضية لإيجاد قيمة دالة الهدف وقيم متغيرات القرار (X_j) ، بينما عند تطبيق طريقة تقييد دالة المقام فإن الوصول الى الحل الأمثل تطلب ثلاثة جداول تكرارية وقيمة دالة الهدف ومتغيرات القرار تستخرج بشكل مباشر من جدول الحل الأمثل .

٥- تم التوصل الى نفس النتائج في الطريقتين وكما مبين في الجدول ادناه

ت	نوع المنتج	الرمز الرياضي	طريقة تقييد دالة المقام	طريقة التحويلات الخطية
١	المدفأة	X_1	٠	٠
2	الطباخ	X_2	٢.٣٧٥٠	2.3684
	نسبة كمية الانتاج الى التكاليف		٠.٠٠٩٠٤	٠.٠٠٩٠٣
	عدد الجداول التكرارية في الحل		٣	٥

٦- مما ذكر آنفاً فإن إستعمال طريقة تقييد دالة المقام تعد أفضل من طريقة التحويلات الخطية لـ Charnes & Cooper .



حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بإستعمال طريقة تقييد دالة ومقارنتها مع طريقة التحويلات الخطية

٦-٢- التوصيات

١- نوصي بإعداد حزم برامج مخصصة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية من دون اللجوء لطرائق التحويلات الخطية .

٧- المصادر :

أ. المصادر العربية

- ١- السبعاوي، احمد محمود و العزيز ، ندى يوسف ، (٢٠١٣) ، "خوارزمية جينية مقترحة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية مع التطبيق" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ، العدد ٢٥ .
- ٢- الشمري ، حامد سعد نور ، (٢٠١٠) ، "بحوث العمليات " مفهومياً وتطبيقاً " ، الطبعة الاولى ، مكتبة الذاكرة ، العراق - بغداد .
- ٣- الطراونة ، محمد وعبيدات ، سليمان ، (٢٠٠٩) ، "مقدمة في بحوث العمليات" ، الطبعة الاولى ، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة ، عمان - الاردن .
- ٤- المهنتي ، اكرم محمد عرفان ، (٢٠١٠) ، " الاساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية (بحوث العمليات) " ، الطبعة الاولى ، دار صفاء للنشر والتوزيع ، عمان - الاردن .
- ٥- رحيمة ، رشيد بشير ، (٢٠١١) ، " صياغة وحل نماذج البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة لاكرانج المطورة " ، مجلة علوم ذي قار ، المجلد ٢ ، العدد ٤ .
- ٦- شعبان ، عبد الكريم هادي ، (٢٠٠٨) ، " تطبيقات في الاساليب الكمية وبحوث العمليات مشاكل ... وحلول " ، الطبعة الاولى ، مطبعة الغري الحديثة ، العراق - النجف الاشرف .
- ٧- لايد ، واثق حيواي ، (٢٠١٢) ، " إتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية بأستخدام طريقة برمجة الأهداف " ، مجلة الهندسة ، العدد ٨ ، مجلد ١٨ .

ب. المصادر الأجنبية

- 8- A.Charnes & W.W.Cooper , (1962) , " programming with linear fractional function " , Naval Research Logistics Quarlerly , VoL:9 , P.P:181-186 .
- 9- A.Charnes & W.W.Cooper , (1973) , " An explicit general solution in linear fractional programming " , Naval Research Logistics Quarlerly , No:3 , VoL:20 , P.P:449-467 .
- 10- E.B.Bajalinove, (2003) , " linear fractional programming : Theory, Methods , Applications and softwar , Kluwer Academic Publishers .
- 11- F.S.Hillier & G.J.Lieberman, (2001), " Introduction to Operations Research " , the MCGraw-Hill Companies .
- 12- G.R.Bitran and A.G.Novaes , (1972), "linear programming with a fractional objective function" University of Saopauio, Brazil, VoL:21, P.P:22-29 .
- 13- H.C.Lai & et al , (1999) , " Necessary and sufficient conditions for minmax fractional programming " , Jornal of Mathematical Analysis and Applications , VoL: 230 , NO:2 , P.P:311-328 .
- 14- I.M.Stancu-Minasian , (1997) , " fractional programming : Theory , Methods and Applications , Kluwer Academic Publishers .
- 15- K.Swarup , (1964) , " linear fractional function programming " , Operation Research , VoL:13 , NO:6 , P.P:1026-1036 .



- 16- M.B.Hasan & S.Acharjee , (2011) , “ solving LFP by conerting into asingle LP “ , International Journal of Operation Research , VoL:8 , NO:3 , P.P:1-14 .
- 17- P.Pandion & M.Jayalakshmi , (2013) , “on solving linear fractional programming problems “ , Modern Applied Science , VoL:7 , NO:6 , P.P:90-100.
- 18- S.C.Sharma & A.Bansal, (2011) , “ An Integer solution of fractional programming problem “ , Gen.Math.Notes , VoL:4 , NO:2 , P.P:1-9 .
- 19- S.Hashizume & et al , (1987) , “ Approximation algorithms for combinatorial fractional programming problems “ , Mathematical programming , VoL:37 , NO:3 , P.P:255-267 .
- 20- S.Tantawy , (2008) , “ A new procedure for solving linear fractional programming problem “ , Mathematical and computer modeling , VoL:48 , P.P:969-973 .
- 21- S.Tantawy , (2008) , “ An interactive method for solving linear fractional programming with sensitiving analysis “ , Mathematical and computer modeling , VoL:13 , NO:8 , P.P:147-151 .



**solving linear fractional programming problems (LFP) by Using denominator
function restriction method and compare it with linear transformations
method**

Abstract

The use of modern scientific methods and techniques, is considered important topics to solve many of the problems which face some sector, including industrial, service and health. The researcher always intends to use modern methods characterized by accuracy, clarity and speed to reach the optimal solution and be easy at the same time in terms of understanding and application.

the research presented this comparison between the two methods of solution for linear fractional programming models which are linear transformation for Charnas & Cooper , and denominator function restriction method through applied on the oil heaters and gas cookers plant , where the show after reaching the final results that denominator function restriction method the foremost function is best in terms of easy application as well as the speed in the footsteps of the solution to reach the optimal solution as well as they don't need to add random variable and to add a new constraint to the model as is the case in the linear transformation method for Charnas & Cooper .

Key Words :- linear fractional programming (LFP) , linear programming (LP) , linear transformation for Charnas & Cooper , denominator function restriction method , simplex method , Big-M method .