The Administration & Economic College Journal
For Economics & Administration & Financial Studies
Vol. 8,N.4, PP. 136-162
ISSN PRINT 2312-7813
ISSN ONLINE 2313-1012
مجلة كلية الإدارة والاقتصاد للدراسات الاقتصادية والإدارية والمالية
المجلد 8، العدد 4، 2016 ص ص 189-201

A Geometric Integer – Valued GARCH Model

Hala Fadal Hussian Alhakem (*)

أنموذج GARCH بقيم صحيحة في حالة التوزيع الهندسي

(*) هالة فاضل حسين الحكيم

Abstract

In this paper, the modeling of integer – valued time series with over dispersion is discussed. A particularly flexible model for time series of counts is the Geometric integer – valued Generalized Autoregressive conditional hetrosscedatic (GEO - GARCH) model which properly accounts for the over disersion and non – negativity. This model is proposed and the autocorrelation function are given. The main goal of this paper is to study the properties of model and some results from simulation study to estimate the unknown parameters by using Maximum Likelihood method.

Keywords: Geometric Integer, GARCH Model.

المستخلص:

في هذا البحث نوقشت نمذجة السلاسل الزمنية ذات قيم حقيقية غير سالبة وذلك في حالة عدم تجانس التباين. وان الانموذج الخاص للسلاسل الزمنية المعدودة يمكن وصفه بانموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين الهندسي.

تم اقتراح هذا الانموذج فضلاً عن ايجاد دالة الارتباط الذاتي له. ان الهدف الاساس لهذا البحث هي دراسة خصائص الانموذج وعرض بعض النتائج لتقدير معلماته بطريقة الامكان الاعظم وباستخدام دراسة المحاكاة.

1. المقدمة:

لقد تناول العديد من الباحثين نماذج الانحدار الذاتي المشروط بعد تجانس التباين للخطأ في حالة التوزيعات المستمرة، إلا أن استخدام هذا الانموذج لا يقتصر على هذه التوزيعات بل تم توسيع استخدامها ليشمل التوزيعات المتقطعة ايضاً بقيم صحيحة وغير سالبة. وقد اطلق على هذه النماذج بالسلاسل الزمنية المعدودة (Count Time Series) او القابلة للعد.

لقد اصبح لهذا النوع من السلاسل تطبيقات واسعة، لاسيما في مجال التأمين الصناعي، الاقتصاد، الطب، الاتصالات، انظمة الانتظار، وغيرها، حيث ان قيم السلسلة الزمنية المعدودة ممكن ان تكون عدد من الحوادث، اعداد المرضى، عدد المنتجات الصناعية.

ولتحليل السلسلة الزمنية المعدودة فقد تم اقتراح عدد من النماذج وذلك لوصف توزيعاتها الحدية (Marginal Distribution) ومركبات الارتباط الذاتي. لقد ناقش كل من (Zeger, 1988)[7] و (Davis et al, 2000, 2003)[1][2] نماذج الانحدار اللوغارتمي في حالة

(*) lecturer, Baghdad University, Higher Instutute of science Accounting and financial.

بواسون، اضافة الى ما قدمه الباحثان (Kedem & Fokianas, 2002)[6] في استخدام هذا النوع من السلاسل بشكل واسع.

كما قام (Fokianos, 2011)[5] بدراسة وعرض نماذج الانحدار للسلاسل الزمنية المعدودة حيث ناقش الصيغة التي تعتمد على النماذج الخطية العامة واحد اصناف عمليات الانحدار الذاتي ذات القيم الصحيحة.

وقد ناقش (Zhu, 2011)[10] هذا الانموذج عندما تكون قيم السلسلة الزمنية معدودة وغير سالبة وتعاني من مشكلة عدم التجانس، وان مشاهدات هذه السلسلة تتبع توزيع ثنائي الحد السالب (Negative Binomial) والذي يرمز له اختصاراً (NBINGARCH) وقد بين الباحث ان هذا النوع من السلاسل تكون تغيراتها اكبر من المتوسط وان السبب الرئيس لوجود حالة عدم التجانس هو وجود ارتباط موجب بين مشاهداتها.

ان دراسة انموذج (GARCH) في حالة التوزيع الهندسي يعد حالة خاصة من الانموذج (NBINGARCH). كما اقترح (Davis and wn, 2009)[3] انموذج انحدار ثنائي الحد السالب للسلاسل الزمنية المعدودة والتي تعد تعميماً لنماذج انحدار بواسون الخطية اللوغارتيمية. ان الانموذج الشائع الاستخدام للسلاسل الزمنية المعدودة بوجود عدم التجانس هو انموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين العام بقيم صحيحة ويرمز له اختصاراً (INGARCH) بمتغيرات بواسون. وقد عرف (Ferland et al, 2006)[4] هذا الانموذج بالصيغة الآتية:

$$\begin{cases} X_t / F_{t-1} : P(\lambda_t) \\ \lambda_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j X_{t-j} \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

إذ أن $\alpha_0 > 0\ ,\ \alpha_i > 0\ ,\ \beta_j > 0$ عندما $i = 1,2,\ldots,p$ ، $j = 1,2,\ldots,q$ وأن $p \geq 1$ و $q \geq 0$ و F_{t-1} تمثل $(\sigma - field)$ تولد بالمتسلسلة $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\ldots\}$.

ولقد درس هذا الانموذج العديد من الباحثين منهم (Zhu et al, 2008)[8] و (Zhu & wang, 2010)[9]. كما قام (Weib, 2009)[11] باشتقاق مجموعة من المعادلات لدالة التباين والارتباط الذاتي للحالة العامة للانموذج. فضلاً عن ذلك فقد بين (Zhu, 2011)[10] ان انموذج بواسون يكون فيه المتوسط المشروط مساوياً للتباين المشروط وان ذلك ممكن ان يؤدي الى ضعف الاداء في ظل وجود مشاهدات متطرفة محتملة، وبذلك فقد اقترح انموذج بديل هو انموذج ثنائي السالب الذي يتعامل مع عدم التجانس والمشاهدات المتطرفة في آن واحد.

2. مشكلة البحث:

في كثير من التطبيقات تكون الظاهرة المدروسة تخضع لأحد التوزيعات الاحتمالية المتقطعة وان بناء الانموذج لهذه الظاهرة يتطلب دراسة نظرية شاملة لخصائص العينة المدروسة بما في ذلك الاعتمادية وحالة عدم التجانس والقيم المتطرفة. وان دراسة هذه الخصائص في حقل السلاسل الزمنية يتطلب دراسة نماذج (INGARCH) الملائمة وبالتالي امكانية التنبؤ بالقيم المستقبلية.

3. هدف البحث:

يهدف بحثنا الى اقتراح ودراسة انموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين (GARCH) في حالة اتباع السلسلة الزمنية التوزيع الهندسي والذي سيرمز له اختصاراً (GEO - GARCH).

4. الجانب النظري:

أنموذج (GEO – GARCH):

على فرض ان $\{X_t\}$ تمثل سلسلة زمنية ذات قيم متقطعة (معدودة)، مشروطة بـــ (F_{t-1})، وان المتغيرات العشوائية $X_1, \ldots, X_n$ مستقلة والتوزيع الشرطي لـــ (X_t) يتمثل بالتوزيع الهندسي. وذلك فأن الانموذج الذي يصف هذه المتغيرات يكون:

$$X_t / F_{t-1} : G(P_t)$$

أذ أن F_{t-1} هي $(\sigma - field)$ وتتولد بالمتغيرات $(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\ldots)$ وان (P_t) يحقق الانموذج التالي بفرض أن $(\lambda_t = \frac{1-P_t}{P_t})$:

$$\frac{1-P_t}{P_t} = \lambda_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j X_{t-j} \qquad \ldots(2)$$

إذ أن $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$ عندما $i = 1,2,\ldots,p$ ، $j = 1,2,\ldots,q$ و $p \geq 1$ و $q \geq 0$.

وأن الانموذج (2) سوف يرمز له اختصاراً (GEO – GARCH)

ان دالة الاحتمال المشروطة للسلسلة (X_t) تاخذ الصيغة الآتية:

$$P(X_t = x_t / F_{t-1}) = p_t (1 - p_t)^{x_t} \quad , \quad x_t = 0,1,\ldots. \qquad \ldots(3)$$

إذ أن:

$$P_t = \frac{1}{1+\lambda_t} \quad , \quad q_t = 1 - P_t = \frac{\lambda_t}{1+\lambda_t}$$

وبذلك فأن المتوسط والتباين المشروطين للسلسلة X_t تعطى بالشكل الآتي:

$$E[X_t / F_{t-1}] = \frac{1-p_t}{p_t} = \lambda_t$$

$$Var[X_t / F_{t-1}] = \frac{1-p_t}{p_t^2} = \lambda_t(1+\lambda_t)$$

على التوالي. وأن ذلك يشير الى ان

$$Var[X_t / F_{t-1}] > E[X_t / F_{t-1}]$$

علاوة على ذلك:

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= E[Var(X_t / F_{t-1})] + Var[E(X_t / F_{t-1})] \\ &= E[\lambda_t(1+\lambda_t)] + Var(\lambda_t) \\ &= E(\lambda_t) + E(\lambda_t)^2 + Var(\lambda_t) > E(\lambda_t) = E(X_t) \end{aligned}$$

كما يمكن كتابة الآتي:

$$X_t = \lambda_t + (X_t - \lambda_t)$$

وعلى فرض أن:

$$\in_t = X_t - \lambda_t$$

$$\therefore \quad X_t = \lambda_t + \in_t$$

وبأخذ التوقع الرياضي لـــ X_t ينتج أن:

$$E(X_t) = E[E(X_t / F_{t-1})] = E(\lambda_t)$$

خصائص السلسلة $\in_t$:

1.

$$\begin{aligned} E(\in_t) &= E[E(\in_t / F_{t-1})] = E[E\{(X_t - \lambda_t) / F_{t-1}\}] \\ &= E[E(X_t / F_{t-1})] - E[\lambda_t / F_{t-1}] = E(\lambda_t) - E(\lambda_t) = 0 \end{aligned}$$

2.

$$Var(\in_t) = \mathrm{var}\left[E(\in_t / F_{t-1})\right] + E\left[\mathrm{var}(\in_t / F_{t-1})\right]$$
$$= 0 + E\left[\mathrm{var}(\in_t / F_{t-1})\right]$$
$$= E\left[Var\{(X_t - \lambda_t) / F_{t-1}\}\right]$$
$$= E\left[Var(X_t / F_{t-1})\right] + E\left[Var(\lambda_t / F_{t-1})\right]$$

ان المعلمة λ_t بدلالة الزمن $(t-1)$ وهي معلومة لذلك يكون تباينها مساوياً للصفر:

$$Var(\in_t) = E\left[Var(X_t / F_{t-1})\right] = E\left[\lambda_t(1+\lambda_t)\right] = E(\lambda_t) + E(\lambda_t^2)$$

3.

$$\mathrm{cov}(\in_t, \in_{t+h}) = 0$$

وبذلك يكون $(\in_t)$ متغير عشوائي ويعرف بـــ (white noise).

وبأخذ التوقع الرياضي للمعادلة (2) فأن المتوسط للسلسلة (X_t) يكون:

$$E(\lambda_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_{t-i}) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j E(\lambda_{t-j})$$

وعندما تكون X_t مستقرة فأن:

$$E(\lambda_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_t) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j E(\lambda_t)$$

ولكن:

$$E(X_t) = E(\lambda_t)$$

$$\therefore E(X_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_t) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j E(X_t)$$

$$E(X_t) - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_t) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j E(X_t) = \alpha_0$$

$$\therefore \quad E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i - \sum_{j=1}^{q} \beta_j} \qquad \ldots(4)$$

وبتعويض $E(X_t)$ بالمعادلة (2) ينتج ان:

$$X_t - \in_t = E(X_t)\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i - \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j (X_{t-j} - \in_{t-j})$$

$$X_t - E(X_t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[X_{t-i} - E(X_t)\right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \left[X_{t-j} - E(X_t)\right] + \in_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \in_{t-j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i)\left[X_{t-j} - E(X_t)\right] + \in_t - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \in_{t-j}) \qquad \ldots(5)$$

حيـــــث ان $m = \max(p, q)$. ان الصــــيغة رقـــم (5) تمثـــل انمـــوذج $ARMA(m, q)$ بالمعلمات $\phi_i = (\alpha_i + \beta_i)$ ، $\theta_j = \beta_j$

وعندما $m = p = 1$ فأن الصيغة رقم (5) ستكون:

$$X_t - E(X_t) = (\alpha_1 + \beta_1)(X_{t-1} - E(X_t)) + \in_t - \beta_1 \in_{t-1}$$

وأن خصائص الانموذج ستكون كما يأتي:

1.

$$E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} = \mu$$

2.

$$\operatorname{cov}(X_t, X_{t-h}) = \begin{cases} \dfrac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2}\left[\mu + \mu^2\right] & , h = 0 \\ \dfrac{\alpha_1\left[1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\right]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2}(\alpha_1 + \beta_1^{h-1})\left[\mu + \mu^2\right] & , h \geq 1 \end{cases}$$

3.

$$\rho_x = corr\ (X_t, X_{t-h}) = (\alpha_1 + \beta_1^{h-1})\frac{\alpha_1\left[1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\right]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2}\left[\mu + \mu^2\right] \qquad , h \geq 1$$

اما تباين $(\in_t)$فيكون بالصيغة الآتية:

$$\lambda_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 \lambda_{t-1}$$

$$\begin{aligned} E(\lambda_t)^2 &= E\left[\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 \lambda_{t-1} + \alpha_1 \lambda_{t-1} - \alpha_1 \lambda_{t-1}\right]^2 \\ &= E\left[\left\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\right\} + \alpha_1(X_{t-1} - \lambda_{t-1})\right]^2 \\ &= E\left[\left\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\right\} + \alpha_1 \in_{t-1}\right]^2 \\ &= E\left[\left\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\right\}^2 + \alpha_1^2 \in_{t-1}^2 + 2\alpha_1 \in_{t-1}\left\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\right\}\right] \end{aligned}$$

وحيث خاصية الاستقرارية تؤدي الى ان $E(\lambda_t) = E(\lambda_{t-1})$

$$\begin{aligned} E(\lambda_t^2) &= \alpha_0^2 + (\alpha_1 + \beta_1)E(\lambda_t^2) + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)E(\lambda_t) + \alpha_1^2\mu - \alpha_1^2 E(\lambda_t^2) \\ &= \frac{\alpha_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)\mu + \alpha_1^2\mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} \end{aligned}$$

وبالتعويض عن $\alpha_0 = \mu(1 - \alpha_1 - \beta_1)$يكون:

$$E(\lambda_t^2) = \frac{\mu^2\left[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\right] + \alpha_1^2\mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2}$$

وبما أن $Var\ (\in_t) = E\lambda_t + E\lambda_t^2$فان:

$$\operatorname{var}(\in_t) = \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 - \beta_1)^2 + \alpha_1^2}(\mu - \mu^2)$$

تقدير المعلمات:

بالامكان تقدير معلمات الانموذج بأستخدام الطرائق التقليدية (yull - walker)، المربعات الصغرى الشرطية، وطريقة الامكان الاعظم. وفي هذا البحث سيتم التركيز على الطريقة الاخيرة.

طريقة الامكان الاعظم: Maximum Likelihood Method

على فرض أن

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)'$$

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)'$$

$$\theta = (\alpha', \beta')'$$

وأن المشاهدات $(X_{t-p}, \dots, X_0, X_1, \dots, X_n)$ تخضع للتوزيع الهندسي المشروط وتتبع الانموذج بالمعادلة (2).

ولوصف اسلوب الامكان الاعظم سيتم اولاً حساب دالة لوغاريتم الامكان لدالة الكثافة الاحتمالية الشرطية للتوزيع الهندسي $L(\underline{\theta})$ وكما يأتي:

$$L(\underline{\theta}) = \sum_{t=1}^{n} L_t(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \log P_t + \sum_{t=1}^{n} X_t \log(1 - P_t)$$

وبدلالة λ_t يكون:

$$L(\underline{\theta}) = \sum_{t=1}^{n} \left[X_t \log \lambda_t - (1 + X_t) \log (1 + \lambda_t) \right]$$

وبتعظيم الدالة $L(\underline{\theta})$ يتم الحصول على تقدير $\underline{\theta}$ وذلك بأستخدام الطرائق العددية. ولأجل الحصول على الاخطاء المعيارية التقاربية لتقدير الامكان الاعظم يتم ايجاد المشتقة الاولى للدالة $L(\underline{\theta})$ بالنسبة للمعلمة $\theta_i = (i = 0, 1, \dots, p + q)$ بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta_i} = \left(\frac{X_t}{\lambda_t} + \frac{1 + X_t}{1 + \lambda_t}\right) \frac{\partial \lambda_t}{\partial \theta_i}$$

والمشتقات الثانية:

$$\frac{\partial^2 L_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \left(\frac{X_t}{\lambda_t} + \frac{1 + X_t}{1 + \lambda_t}\right) \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \left(\frac{X_t}{\lambda_t^2} + \frac{1 + X_t}{(1 + \lambda_t)^2}\right) \frac{\partial \lambda_t}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \lambda_t}{\partial \theta_j}$$

عندما $i, j = 0, 1, \dots, p + q$

ومن ثم حساب المشتقات الآتية:

1. للمتغير X_t نسبة الى α_0:

$$\frac{\partial L_t}{\partial \alpha_0} = \left[\frac{X_t}{\lambda_t} - \frac{1 + X_t}{1 + \lambda_t}\right] \frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_0} \quad , t = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_0} = 1 + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \frac{\partial \lambda_{t-k}}{\partial \alpha_0} \quad , t = 1, 2, \dots, n$$

2. للمتغير X_t نسبة الى α_i:

$$\frac{\partial L_t}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{X_t}{\lambda_t} - \frac{1 + X_t}{1 + \lambda_t}\right] \frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_i} \quad , t = 1, 2, \dots, n \ , i = 1, 2, \dots, p$$

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_i} = X_{t-i} + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \frac{\partial \lambda_{t-k}}{\partial \alpha_i} \quad , t = 1, 2, \dots, n \ , i = 1, 2, \dots, p$$

3. للمتغير X_t نسبة الى β_j:

$$\frac{\partial L_t}{\partial \beta_j}=\left[\frac{X_t}{\lambda_t}+\frac{1+X_t}{1+\lambda_t}\right]\frac{\partial \lambda_t}{\partial \beta_j} \qquad , t=1,2,\dots,n \ , i=1,2,\dots,q$$

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \beta_j}=X_{t-j}+\sum_{k=1}^{q}\beta_k\frac{\partial \lambda_{t-k}}{\partial \beta_j} \qquad , t=1,2,\dots,n \ , i=1,2,\dots,q$$

ومن ثم استخدام احدى الطرائق التكرارية في حساب المشتقات وتقدير معلمات الانموذج قيد الدراسة، علاوة على ذلك فأن الاخطاء المعيارية التقاربية لـــــ (MLE) يمكن حسابها من خلال المصفوفة الآتية:

$$\frac{1}{n}(\hat{D}_n\hat{S}_n^{-1}\hat{D}'_n)^{-1}$$

إذ أن:

$$\hat{S}_n=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial L_t}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial L_t}{\partial \theta'}$$

$$\hat{D}_n=-n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial^2 L_t}{\partial \theta\,\partial \theta'} \qquad \dots(6)$$

5. الجانب التجريبي:

- خطوات تجربة المحاكاة

1. حساب قيمة (λ_i) حيث ان $i=-p+1,\dots,-1,0$
2. حساب قيمة $p_i=\dfrac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$
3. توليد قيمة (x_i) عند كل قيمة من قيم p_i التي تم توليدها.
4. حساب قيم (λ_i) وقيم التوزيع الهندسي عندما $i=1,2,\dots,n$.
5. تقدير معلمات الانموذج $Geo-GARCH\ (p,q)$ بأفتراض التوزيع الطبيعي والتوزيع الهندسي ايضاً.
6. تكرر التجربة (500) مرة وحساب المعدل ومتوسط مربعات الخطأ لكل معلمة افتراضية.
7. تم تقدير معلمات النماذج المختارة والتي تخضع للتوزيع الهندسي مرّة باستخدام التوزيع نفسه (الهندسي) وفق الصيغ المتبعة في الجانب النظري ومرّة اخرى باستخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير المعلمات في حالة التوزيع الطبيعي.

- نتائج التجربة

عند تصميم تجربة المحاكاة تم اختيار ثلاث نماذج $GARCH\ (1,0)$، $GARCH\ (2,0)$ و $GARCH\ (1,1)$، وثلاث مجاميع من القيم الافتراضية لمعلمات كل أنموذج وكما يأتي:

جدول (1) يمثل القيم الافتراضية لمعلمات النماذج المختارة

المجموعة الثالثة				المجموعة الثانية				المجموعة الاولى				النماذج
β_1	α_2	α_1	α_0	β_1	α_2	α_1	α_0	β_1	α_2	α_1	α_0	

GARCH (1,0)	4	0.2	-	-	3	0.5	-	-	1	0.8	-	-
GARCH (2,0)	2	0.4	0.5	-	4	0.1	0.3	-	3	0.8	0.1	-
GARCH (1,1)	**4**	**0.3**	**-**	**0.5**	**2**	**0.7**	**-**	**0.2**	**5**	**0.3**	**-**	**0.3**

وبالتالي اجراء المقارنـة بين مقدرات التوزيعين الطبيعي والهندسي باستخدام معيـار متوسط مربعات الخطأ (MSE) وايضاً متوسط مقدر المعلمة. وبعد الحصول على النتائج تم عرضـها في الجداول المرقمة (2، 3، 4).

جدول رقم (2) يبين نتائج المحاكاة للانموذج *GARCH* (1,0)

n	par	Value of par	Normal Dist.		Geometric Dist.		Minimum MSE
			Mean	MSE	Mean	MSE	
50	α_0	4	4.185	0.601	4.365	0.558	Geometric
	α_1	0.2	0.164	0.021	0.192	0.018	Geometric
100	α_0	4	4.099	0.255	4.434	0.497	Normal
	α_1	0.2	0.177	0.012	0.190	0.011	Geometric
250	α_0	4	4.034	0.115	4.497	0.412	Normal
	α_1	0.2	0.192	0.004	0.192	0.005	Geometric
500	α_0	4	4.011	0.054	4.4931	0.331	Normal
	α_1	0.2	0.197	0.004	2.197	0.003	Geometric
50	α_0	3	3.298	0.813	3.481	0.603	Geometric
	α_1	0.5	0.446	0.021	0.460	0.037	Normal
100	α_0	3	3.155	0.279	3.510	0.532	Normal
	α_1	0.5	0.468	0.008	0.473	0.019	Normal
250	α_0	3	3.065	0.122	3.508	0.409	Normal
	α_1	0.5	0.488	0.003	0.490	0.008	Normal
500	α_0	3	3.014	0.054	3.508	0.331	Normal
	α_1	0.5	0.496	0.002	0.493	0.004	Geometric
50	α_0	1	1.266	0.424	1.307	0.419	Geometric
	α_1	0.8	0.727	0.018	0.707	0.048	Normal
100	α_0	1	1.109	0.126	1.563	0.111	Geometric
	α_1	0.8	0.764	0.007	0.745	0.004	Geometric
250	α_0	1	1.063	0.047	1.500	0.296	Normal
	α_1	0.8	0.783	0.002	0.786	0.001	Geometric
500	α_0	1	1.0253	0.021	1.483	0.255	Normal
	α_1	**0.8**	**0.792**	**0.006**	**0.792**	**0.005**	**Geometric**

جدول رقم (3) يبين نتائج المحاكاة للانموذج $GARCH\ (2,0)$

n	par	Value of par	Normal Dist.		Geometric Dist.		Minimum MSE
			Mean	MSE	Mean	MSE	
50	α_0	2	6.606	157.531	2.653	0.731	Geometric
	α_1	0.4	0.271	0.058	0.381	0.046	Geometric
	α_2	0.5	0.249	0.050	0.401	0.046	Geometric
100	α_0	2	6.838	68.349	2.573	0.593	Geometric
	α_1	0.4	0.307	0.040	0.401	0.023	Geometric
	α_2	0.5	0.289	0.034	0.433	0.023	Geometric
250	α_0	2	7.099	132.490	2.577	0.491	Geometric
	α_1	0.4	0.319	0.029	0.394	0.009	Geometric
	α_2	0.5	0.342	0.026	0.473	0.009	Geometric
500	α_0	2	6.057	30.236	2.537	0.406	Geometric
	α_1	0.4	0.341	0.023	0.401	0.004	Geometric
	α_2	0.5	0.358	0.023	0.485	0.005	Geometric
50	α_0	2	5.364	4.444	4.258	0.626	Geometric
	α_1	0.4	0.058	0.027	0.132	0.029	Normal
	α_2	0.5	0.178	0.031	0.255	0.030	Geometric
100	α_0	2	5.006	2.183	4.283	0.534	Geometric
	α_1	0.4	0.087	0.014	0.128	0.018	Normal
	α_2	0.5	0.217	0.018	0.273	0.019	Normal
250	α_0	2	4.754	1.155	4.386	0.388	Geometric
	α_1	0.4	0.090	0.006	0.108	0.008	Normal
	α_2	0.5	0.263	0.009	0.294	0.007	Geometric
500	α_0	2	4.640	0.779	4.440	0.358	Geometric
	α_1	0.4	0.098	0.004	0.106	0.003	Geometric
	α_2	0.5	0.278	0.006	0.295	0.004	Geometric
50	α_0	2	10.913	1374.32	3.557	0.746	Geometric
	α_1	0.4	0.487	0.0148	0.694	0.012	Geometric
	α_2	0.5	0.015	0.042	0.099	0.013	Geometric
100	α_0	2	10.593	227.671	3.515	0.620	Geometric
	α_1	0.4	0.533	0.107	0.752	0.006	Geometric
	α_2	0.5	0.036	0.032	0.091	0.007	Geometric
250	α_0	2	10.911	333.518	3.560	0.522	Geometric
	α_1	0.4	0.558	0.087	0.776	0.003	Geometric
	α_2	0.5	0.066	0.028	0.094	0.003	Geometric
500	α_0	2	9.724	120.754	3.547	0.446	Geometric
	α_1	0.4	0.578	0.077	0.793	0.001	Geometric

	α_2	0.5	0.076	0.027	0.094	0.002	Geometric

جدول رقم (4) يبين نتائج المحاكاة للانموذج $GARCH \quad (1,1)$

n	par	Value of par	Normal Dist.		Geometric Dist.		Minimum MSE
			Mean	MSE	Mean	MSE	
50	α_0	4	14.169	242.60	4.176	0.574	Geometric
	α_1	0.3	0.239	0.044	0.221	0.013	Geometric
	β_1	0.5	-0.005	0.385	0.598	0.029	Geometric
100	α_0	4	9.879	107.874	4.260	0.558	Geometric
	α_1	0.3	0.257	0.024	0.234	0.037	Normal
	β_1	0.5	0.222	0.227	0.582	0.023	Geometric
250	α_0	4	5.990	19.737	4.444	0.583	Geometric
	α_1	0.3	0.273	0.011	0.250	0.042	Normal
	β_1	0.5	0.434	0.050	0.505	0.032	Geometric
500	α_0	4	5.458	8.662	4.589	0.608	Geometric
	α_1	0.3	0.283	0.007	0.266	0.045	Normal
	β_1	0.5	0.453	0.029	0.437	0.039	Normal
50	α_0	4	8.143	126.22	2.442	0.682	Geometric
	α_1	0.3	0.463	0.110	0.568	0.046	Geometric
	β_1	0.5	-0.015	0.187	0.331	0.066	Geometric
100	α_0	4	7.213	263.58	2.553	0.640	Geometric
	α_1	0.3	0.503	0.085	0.607	0.027	Geometric
	β_1	0.5	0.121	0.100	0.254	0.038	Geometric
250	α_0	4	7.037	247.04	2.591	0.656	Geometric
	α_1	0.3	0.528	0.063	0.626	0.010	Geometric
	β_1	0.5	0.152	0.076	0.248	0.006	Geometric
500	α_0	4	5.936	46.185	2.723	0.744	Geometric
	α_1	0.3	0.546	0.0522	0.633	0.006	Geometric
	β_1	0.5	0.1734	0.062	0.239	0.047	Geometric
50	α_0	4	10.848	92.553	5.116	0.693	Geometric
	α_1	0.3	0.230	0.051	0.186	0.027	Geometric
	β_1	0.5	-0.087	0.377	0.384	0.036	Geometric
100	α_0	4	8.504	44.508	5.083	0.599	Geometric
	α_1	0.3	0.262	0.026	0.248	0.010	Geometric
	β_1	0.5	0.087	0.207	0.396	0.028	Geometric
250	α_0	4	6.936	17.035	5.115	0.490	Geometric
	α_1	0.3	0.280	0.011	0.266	0.005	Geometric
	β_1	0.5	0.199	0.087	0.392	0.019	Geometric
500	α_0	4	5.969	4.886	5.102	0.507	Geometric

α_1	0.3	0.284	0.007	0.287	0.003	Geometric
β_1	0.5	0.266	0.033	0.376	0.017	Geometric

الاستنتاجات

1. من خلال الجدول رقم (2) الذي يوضح تجربة الانموذج $GARCH\ (1,0)$ يتبين ان ميل المقدرات للتوزيع الطبيعي كانت الاقرب من التوزيع الهندسي وبالاخص عند تقدير المعلمة (α_0). كما لوحظ ان القيمة التقديرية للمعلمة (α_0) تميل للتوزيع الهندسي فقط عندما يكون حجم العينة صغير(50) ومن ثم يتلاشى الميل عند حجوم العينات الكبيرة. بينما كانت القيمة التقديرية للمعلمة (α_1) تميل الى التوزيع الهندسي عند حجوم العينات الكبيرة على الاغلب.
2. ويلاحظ في تجربة الانموذج $GARCH\ (2,0)$ والموضح نتائجها في الجدول رقم (3) ما يأتي:

آ- ان متوسط المقدر للتوزيع الطبيعي (α_0) يبتعد كثيراً عن القيم الافتراضية ويليها (α_1) ولمعظم حجوم العينة.

ب- ان قيم (MSE) للمقدر الهندسي (α_0) اقل من المقدر الطبيعي مما يعطي انطباع تأثر التقدير الطبيعي للمعلمة نتيجة اتباع المشاهدات للتوزيع الهندسي.

جـ- ان معدل المقدرات $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$في حالة التوزيع الهندسي كانت مقاربة للقيم الافتراضية، وينطبق التحليل نفسه بالنسبة لمتوسط مربعات الخطأ، عدا المقدر الطبيعي (α_1) فأنه يتفوق على المقدر الهندسي في بعض الحالات وبالاخص العينات الصغيرة، فيما لا تظهر هذه الحالة في العينات الكبيرة.

3. ويتبين من تجربة الانموذج $GARCH\ (1,1)$ في الجدول رقم (4) ما يأتي:

آ- ان ميل المقدرات للتوزيع الطبيعي ضعيف جداً في حالة العينات الصغيرة وذلك اعتماداً على قيم (MSE) والمتوسط مقارنة مع القيم الافتراضية وبالاخص المعلمة (β_1)في حالة حجم العينة $(n = 50)$.

ب- ان ميل المقدرات كافة كانت على الاغلب للتوزيع الهندسي عدا مقدر المعلمة (α_1)فانه يتذبذب طبقاً لقيمة تلك المعلمة، كما في حالة القيم الافتراضية للمجموعة الاولى ولحجوم عينة (500، 250، 100).

جـ- اما المقدر الهندسي (β_1) فهناك حالة شاذة واحدة ضمن نفس المجموعة وعندما $(n = 500)$.

التوصيات

1. نوصي بدراسة الانموذج في حالة الرتب العليا تجريبياً.
2. نوصي باستخدام الانموذج المدروس تطبيقياً عند توفر مشاهدات تخضع للتوزيع الهندسي.
3. نوصي بدراسة الانموذج في حالة وجود قيم مفقودة.

المصادر

1. Davis, R. A, Dunsmuir, W.T.M. and Wang, Y. (2000). On autocorrelation in a poisson regession model. Biometrika, 87, pp(491-505).

2. Davis, R.A, Dunsmuir, W.T.M and Streett, S. B. (2003). Observation – driven models for poisson counts. Biometrika, 90, pp(777-790).

3. Davis, R. A, and Wn, R. (2009). A negative Binomial model for time series of counts. Biometrika 96, pp(735-49).

4. Ferland, R, Latour, A. and Oraichi, D. (2006). Integer – valued GARCH process. Journal of Time Series Analysis, 27, (923-942).

5. Fokianos, K. (2011). Count time series. Time series analysis – methods and application, hand book of statistic, vol.30, pp(315-347). Amsterdam.

6. Kedem, B. and Fakianos, K. (2002). Regression method for time series analysis, holden, new jersey: wiley.

7. Zeger, S. L. (1988). A regression model for time series of counts. Biometrika, 75, 621 – 629.

8. Zhu, F., Wang, D., Li, F., and Li, H. (2008). Emperical Likelihood inference for an integer-valued ARCH(p) model in Chinese. Journal of Jilin university (science edition)46, 1042 – 1048.

9. Zhu, F., Li, Q. and Wang, D. (2010). A mixture integer – valued ARCH model. Journal of Statistical Planning and Inference, 140, pp(2025 – 2036).

10. Zhu, F. (2011). Anegative binomial interger – valued GARCH model, J. of Time series Analysis, vol.32, no.1. pp(54-67).

11. Weib, C.H. (2009). Modelling time series of counts with over dispersion. Statistical methods and application, 18, pp(507-519).