خوارزمية تعميم القاعدة التي تحسب عدد المتغيرات الحرة في المربعات السحرية القطرية الزوجية (المضاعفة – الفردية)

م. صادق عبد العزيز مهدي
الجامعة المستنصرية – كلية التربية
م. م.علاء حسين لفتة
جامعة بغداد – كلية العلوم

الملخص

لقد قمنا في هذا البحث بوضع خوارزمية تعميم القانون الذي يحسب من خلالــه عــدد المتغيرات الحرة في المربعات السحرية القطرية الزوجية (المضاعفة – الفردية) ، إن طريقة التعميم هذه لا تعتمد على حل نظام المعادلات الخطية، وإنما تستخدم طرق ونظريــات الجبــر الخطي الأخرى في الحساب .

Algorithm of Generalization of the rule counting the number of the free variables (parameters) in Singly–Even Pandiagonal Magic Squares

Abstract

In this paper, we put the algorithm of generalization the rule of counting the number of the free variables (parameters) in the Singly–Even Pandiagonal magic square; our method is not based on the direct computation of the solution of the linear system. Instead, We deduce this rule by applying the theorems and methods of linear algebra.

1- مقدمة Introduction

يهتم كثير من الباحثين بدراسة المربعات السحرية(Magic Squares)، والتي تعد نوعا مــن أنواع الرياضة الفكرية المميزة وذلك لان عملية جمع الأعداد في هذه المربعات سواء في الأســطر أو الأعمدة أو الأقطار الرئيسية تشترط الناتج نفسه مما يوحي بالسحر .

إن دراسة المربعات السحرية ترتبط بأكثر من مجال من مجالات الرياضيات المختلفة منها الجبر الخطي ونظرية الأعداد والمصفوفات وغيرها فالمربع السحري من الرتبة n هو عبارة عن مصفوفة مربعة حجمها (n×n)، وإذا كان الجمع لعناصر الأقطار الممتدة مساوية للثابت السحري فانه يطلق على المربع اسم المربع السحري القطري [5] .

تعريف (1-1) : [2]

ليكن C فضاءا متجها على الحقل K ,فإننا نقول عن المتجهات $C_1, C_2, \ldots, C_n$ إنها مرتبطة خطيا على K , اذا وجدت مجاهيل مثل $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ليست كلها أصفارا بحيث:

$$b_1 \times C_1 + b_2 \times C_2 + \ldots + b_n \times C_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-1)$$

وإلا فإننا نقول أن المتجهات $C_1, C_2, \ldots, C_n$ مستقلة خطيا على K عندما يكون:

$$b_1 = 0 \ , b_2 = 0 \ , \ldots\ldots, b_n = 0$$

تعريف (2-1) :

تكون المصفوفة A مملوءة الرتبة إذا وفقط إذا كانت اسطرها أو أعمدتها مستقلة خطيا .

نظرية (3-1) : [2]

إن الصفوف غير الصفرية $R_1, R_2, \ldots, R_n$ في المصفوفة A المدرجة تكون مستقلة خطيا.

نظرية (4-1) : [1]

إن رتبة الصف ورتبة العمود لأي مصفوفة A متساويتان .

نتيجة (5-1): [3]

اذا كانت أعمدة منقول المصفوفة مستقلة خطيا , فان المصفوفة تكون مملوءة الرتبة, بمعنى ان اسطرها مستقلة خطيا .

تعريف (6-1): [1]

تكون المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الرتبة (n×n) مصفوفة مهيمنة قطريا إذا تحققت المعادلة التالية:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1,2,\ldots, n$$

نظرية(7-1): [4]

إذا كانت A مصفوفة مهيمنة قطريا فان المصفوفة A قابلة للقلب .

2- تعميم حساب المتغيرات الحرة للمربعات السحرية القطرية الزوجية (المضاعفة – الفردية) للرتبة (n×n)

إن النظام الخطي الناشئ من تعريف المربع السحري القطري (n×n)، حيث (n) عدد زوجي (مضاعف – فردي) يكون فيه عدد المتغيرات الحرة هو ناتج العلاقة $V = n^2 - 4n + 4$.

الحل :

المربع السحري القطري الزوجي (n×n) حيث (n) عدد زوجي(مضاعف – فردي) والــذي يشتمل على المجاهيل $a_1, a_2, ..., a_{n^2}$ كما في الشكل (1 – 2):

a_1	a_2	………	a_n
a_{n+1}	a_{n+2}	………	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮
a_{n^2-n+1}	a_{n^2-n+2}	…..	a_{n^2}

الشكل (1 – 2) مربع سحري قطري زوجي(مضاعف – فردي) (n×n)

حيث أن النظام الخطي متكون من الأسطر والأعمدة والأقطار الممتدة اليمنى والأقطار الممتدة اليسرى فيه على النحو التالي :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = S$$
$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n} = S$$
$$....$$
$$....$$
$$a_{n^2-n+1} + a_{n^2-n+2} + .. + a_{n^2} = S$$

…………………..(2–1 – a)

$$a_1 + a_{n+1} + ... + a_{n^2-n+1} = S$$
$$a_2 + a_{n+2} + ... + a_{n^2-n+2} = S$$
$$.....$$
$$.....$$
$$a_n + a_{2n} + ... + a_{n^2} = S$$

………..……..….(2–1 – b)

$$a_1 + a_{n+2} + \dots\dots\dots + a_{n^2} = S$$
$$a_2 + a_{n+3} + \dots\dots\dots + a_{n^2-n+1} = S$$
$$\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2\text{–}1 - c)$$
$$\dots\dots$$
$$a_n + a_{n+1} + \dots\dots\dots + a_{n^2-1} = S$$
$$a_1 + a_{2n} + \dots\dots\dots + a_{n^2-n+2} = S$$
$$a_2 + a_{n+1} + \dots\dots\dots + a_{n^2-n+3} = S$$
$$\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2\text{–}1 - d)$$
$$\dots\dots$$
$$a_n + a_{2n-1} + \dots\dots\dots + a_{n^2-n+1} = S$$

لدينا أربع معادلات معتمدة خطيا على غيرها وهي المعادلة الأخيرة من المجموعة (2–1 – b) و (2–1 – c) و أخر معادلتين من المجموعة (2–1 – d) والتي تمثل معادلـــة العمـــود الأخيـــر ومعادلة الأقطار الممتدة اليمنى الأخيرة و أخر معادلتين للأقطار الممتدة اليسرى على التوالي ولكـــي نثبت عدم وجود أي معادلة أخرى معتمدة عدا هذه المعادلات الأربع نقوم بالخطوات التالية:

<u>أولا :</u> نقوم بحذف المعادلات الأربع المعتمدات خطيا.

<u>ثانـــياً:</u> نكتب معاملات المجاهيل للمعادلات المتبقية على شكل مصفوفة كما هو مبين في المصـــفوفة رقم (1–2) :

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
1 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 1 & & & & \\
 & 1 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 1 & & & \\
 & & 1 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 1 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 1 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & & 1 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\
1 \;\; 0 & 1 \;\; 0 & 1 \;\; 0 & & 1 \;\; 0 \\
\hdashline
1 & 0 \; 1 & 0 \; 0 \; 1 & & 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 1 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 1 \\
\ddots & \ddots & 1 & & \ddots \\
1 \;\; 0 & 1 & 1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 & & 1 \;\; 0 \;\; 0 \\
\hdashline
1 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 & & 0 \;\; 1 \\
\ddots & 1 & 1 & \cdots & \ddots \\
\ddots & \ddots & 1 & & \ddots \\
 & & \ddots & & \\
1 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 & \cdots & 1 \;\; 0
\end{array}\right)
$$

المصفوفة رقم (2−1)

ثم نثبت أن هذه المصفوفة مملوءة الرتبة (Full Rank)، وذلك من خلال دراسة منقــول المصــفوفة رقم (2−2).

$$
\begin{pmatrix}
\begin{array}{l|l|l|l}
1 & 1 & 1 & 1 \\
\vdots & \quad\ddots & \quad\ddots & \quad\ddots \\
 & & & \qquad\quad 1 \\
1 & \qquad\quad 1 & \qquad\quad 1 & \qquad\quad 0 \\
1 & \qquad\quad 0 & \qquad\quad 0 & \qquad\quad 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 \quad 1 \\
\vdots & \quad\ddots & 1 & \qquad\ddots \\
 & & & \qquad\quad 1 \\
 & & \quad\ddots & 0 \qquad\quad 0 \\
1 & \qquad\quad 1 & & 0 \qquad\quad 0 \\
1 & \qquad\quad 0 & \qquad 1 & 1 \qquad\quad 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 \quad 1 & 0 \quad 0 \quad 1 \\
\vdots & \quad\ddots & 0 & \qquad\quad\ddots \\
 & & 1 & \qquad\qquad 1 \\
 & & & 0 \qquad\qquad 0 \\
 & & & 0 \qquad\qquad 0 \\
1 & \qquad\quad 1 & \quad\ddots & 1 \\
1 & \qquad\quad 0 & \qquad 1\,0 & 0 \quad 1 \\
\hline
 & & & \\
\ddots & \vdots & \vdots & \qquad\quad \vdots \\
\hline
1 & 1 & 0 \quad 1 & 0 \\
\vdots & \quad\ddots & \qquad\ddots & 1 \\
 & & \qquad\quad 1 & \qquad\ddots \\
1 & \qquad\quad 1 & \qquad\quad 0 & \qquad\qquad 1 \\
1 & \qquad\quad 0 & 1 \qquad 0 & \qquad\qquad 0
\end{array}
\end{pmatrix}
$$

المصفوفة رقم (2−2)

ثالثـــــاً: لاثبات أن أعمدة المصفوفة رقم (2−2) لا يوجد بينها ارتباط خطـــي (مســـتقلة خطيا) نجد قيم المجاهيل $b_1, b_2, ..., b_{4n-4}$ المحتملة بحيث تتشكل العلاقة الخطية التالية

$$b_1 \times C_1 + b_2 \times C_2 + ... + b_{4n-4} \times C_{4n-4} = 0 \qquad ....(2-2)$$

حيث ترمز $C_1, C_2, ..., C_{4n-4}$ في المعادلة (2 – 2) إلى أعمدة المصفوفة، إذا كانت قـــيم المجاهيـــل $b_1, b_2, ..., b_{4n-4}$ جميعها مساوية للصفر فهذا يؤدي إلى الإثبات .

رابعاً: نقوم بكتابة المعادلات المكونة من المركبات (الخانات) المتناظرة في المعادلة (2 – 2) علـــى النحو :

$$\begin{aligned}
&b_1 + b_{n+1} + b_{2n} + b_{3n-1} = 0\\
&b_1 + b_{n+2} + b_{2n+1} + b_{3n} = 0\\
&....\\
&b_1 + b_{2n-2} + b_{3n-3} + b_{4n-4} = 0\\
&b_1 + b_{2n-1} + b_{3n-2} = 0\\
&b_1 = 0
\end{aligned} \qquad ....(2-3-1)$$

$$\begin{aligned}
&b_2 + b_{n+1} + b_{3n} = 0\\
&b_2 + b_{n+2} + b_{2n} + b_{3n+1} = 0\\
&....\\
&b_2 + b_{3n-2} + b_{3n-1} = 0
\end{aligned} \qquad ....(2-3-2)$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}
&b_n + b_{n+1} + b_{2n+1} = 0\\
&b_n + b_{n+2} + b_{2n+2} + b_{3n-1} = 0\\
&....\\
&b_n + b_{2n} = 0
\end{aligned} \qquad ....(2-3-n)$$

خامسا: من المعادلة الأخيرة في المجموعة (1 – 3 – 2) نجد أن قيمة المجهول $b_1 = 0$ ، نعوض هذه القيمة في معادلات المجموعة (1 – 3 – 2) الأخرى لذا يمكن القول أن :

$$\sum_{j=n+1}^{4n-4} b_j = 0 \qquad ....(2-4)$$

سادسا : بما أن حاصل جمع معادلات المجموعة (2 – 3 – 2) هو:

$$nb_2 + \sum_{j=n+1}^{4n-4} b_j = 0 \qquad ....(2-5)$$

وبعد تعويض المعادلة (2 – 4) في المعادلة (2– 5) نحصل على قيمة المجهول $b_2 = 0$ وبنفس الطريقة يمكن إيجاد قيم المجاهيل التالية :

$$b_3 = b_4 = ... = b_n = 0$$

سابعا: بعد تعويض قيم المجاهيل $b_1, b_2, ..., b_n$ التي حصلنا عليها سابقا نعيد كتابة المعادلات في الخطوة الرابعة كما يأتي :

$$\begin{aligned}
&b_{n+1} + b_{2n} + b_{3n-1} = 0\\
&b_{n+2} + b_{2n+1} + b_{3n} = 0\\
&....\\
&b_{2n-2} + b_{3n-3} + b_{4n-4} = 0\\
&b_{2n-1} + b_{3n-2} = 0
\end{aligned} \qquad ....(2-6-1)$$

$$\begin{aligned}
&b_{n+1} + b_{3n} = 0\\
&b_{n+2} + b_{2n} + b_{3n+1} = 0\\
&....\\
&b_{3n-2} + b_{3n-1} = 0
\end{aligned} \qquad ....(2-6-2)$$

…

…

$$\begin{aligned}
&b_{n+1} + b_{2n+1} = 0\\
&b_{n+2} + b_{2n+2} + b_{3n-1} = 0\\
&....\\
&b_{2n} = 0
\end{aligned} \qquad ....(2-6-n)$$

ثامنا: من المعادلة (2 – 6 – $\frac{1}{2}n+1$ (n زوجي (مضاعف – فردي))) و (2 – 6 – n) نحصل على قيمة المجهول $b_{\frac{3}{2}n} = 0$ (n زوجي (مضاعف – فردي)) و قيمة المجهول $b_{2n} = 0$ على التوالي، نعوض هاتان القيمتان في المعادلات الأخرى ثم نقارن بينها عن طريق مساواة المعادلات مع بعضها البعض وعلى النحو التالي :

نقوم بمساواة الطرف الأيسر من المعادلة الأولى في المجموعة (2 – 6 – 1)، (2 – 6 – 2)، ....، (2 – 6 – n) فنحصل على العلاقة التالية :

$$\begin{aligned}
b_{2n+1} &= b_{2n+2} = b_{2n+3} + b_{4n-4} = b_{2n+4} + b_{4n-5}\\
&= .... = b_{3n-2} + b_{3n+1} = b_{3n} = b_{3n-1}
\end{aligned} \qquad ....(2-7)$$

نعيد هذه المقارنة بمساواة الطرف الأيسر من المعادلة الثانية في المجموعة (2 – 6 – 1)، (2 – 6 – 2)، ....، (2 – 6 – n) فنحصل على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
b_{2n+1} + b_{3n} &= b_{2n+2} + b_{3n-1} = b_{2n+3} = b_{2n+4} = b_{2n+5} + b_{4n-4}\\
&= b_{2n+6} + b_{4n-5} = ... = b_{3n-2} + b_{3n+3} = b_{3n+2} = b_{3n+1}
\end{aligned} \qquad ....(2-8)$$

لغاية المعادلة $\frac{n}{2}$ (n زوجي (مضاعف – فردي)) في المجموعات أعلاه فينتج:

$$b_{2n+1}+b_{4n-4}=b_{2n+2}+b_{4n-5}=...=b_{3n-2}+b_{3n-1}=0 \qquad \text{.................}(2-9)$$

نعيد ترتيب العلاقات في المعادلة (9 – 2) على النحو آلاتي:

$$\begin{aligned} b_{3n-1} &= -b_{3n-2} \\ b_{3n} &= -b_{3n-3} \\ &.... \\ b_{4n-4} &= -b_{2n+1} \end{aligned} \qquad \text{.................}(2-10)$$

نعوض العلاقات في المعادلة (10 – 2) بما يساويها في المعادلات (7 – 2) و (8 – 2) و المعـــادلات الأخرى والتي على شاكلتها لنحصل على الأتي :

$$\begin{aligned} -2b_{2n+1}+b_{2n+3} &= 0 \\ -2b_{2n+3}+b_{2n+7} &= 0 \\ &...... \\ -2b_{\frac{5}{2}n-2}+b_{3n-3} &= 0 \\ -2b_{\frac{5}{2}n}+b_{2n+1} &= 0 \\ -2b_{\frac{5}{2}n+2}+b_{2n+5} &= 0 \\ &...... \\ -2b_{3n-3}+b_{3n-5} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{....................}(2-11)$$

نضع معاملات المجاهيل في المعادلة (11 – 2)على شكل مصفوفة وعلى النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ ..... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة هي مصفوفة مهيمنة قطريا (Strictly Diagonally Dominant) [4] . لذا هي مصفوفة قابلة للقلب (Invertible Matrix) وعليه فان الحل لنظام المعادلات أعلاه الذي كون هذه المصفوفة لابد أن يكون صفرا أي انه الحل البـــديهي(trivial Solution) وعليـــه فـــان قـــيم

المجاهيل جميعها مساوية للصفر ، وعليه فان جميع قيم المجاهيل الناتجة من المركبات المتناظرة تكون مساوية للصفر أيضا، وهذا دليل على استقلالية أعمدة المصفوفة رقم (2-2).

وبما أن عدد المعادلات المعتمدة اربعة فقط هذا يعني ان عدد المتغيرات الحرة هو :

$V = n^2 - 4n + 4$

4- خوارزمية تعميم القاعدة التي تحسب عدد المتغيرات الحرة في المربعات السحرية القطرية الزوجية (المضاعفة – الفردية)

Algorithm Singly–Even Magic Square

Input

$M_{nX\,n}$= Matrix and represent Singly–Even Pandiagonal magic squares ,

Output

Free parameters of Pandiagonal magic squares

V= n*n-4*n+4

Step 1:

Delet the equations of linear dependence from system (1)
equation in M_{eq} Do
$M_{eq} \longrightarrow M_q$
End for

Step 2:

Write coefficients remaining of the system (1) as matrix (2-1) , and prove that this matrix has full rank .

Step 3:

Prove that the columns of matrix linear independent

$M_{nX\,n} \longrightarrow \{ b_1 , b_2 \;\; b_3 , \; \ldots, b_n \}$,
from :

where $C_1 , C_2 ,..., C_{4n-3}$ denotes the columns of the matrix

And $b_1, b_2 ,..., b_{4n-3}$ are real numbers

Steps 4:

Write the component wise of above equations.

Step 5 : Do

$\{ b_1 , b_2 , b_3 , \; \ldots, b_n \} \longrightarrow \{ 0,0,0 , \ldots\ldots,0 \}$

End for

End Algorithm

5- الاستنتاجات Conclusions

لدينا الجدول رقم (1-5) الذي يبين قيم المحددات والقيم الذاتية للمصفوفة المهيمنة قطريا في بعض المربعات السحرية القطرية (المضاعفة – الفردية) والمربعات السحرية الفردية والتي لها نفس المصفوفة المهيمنة قطريا:

الجدول رقم (1-5) يوضح قيم المحددات والقيم الذاتية للمصفوفات المهيمنة قطريا

القيم الذاتية للمصفوفة المهيمنة قطريا	قيم المحددات للمصفوفة المهيمنة قطريا	رتبة المصفوفة المهيمنة قطريا	رتبة المربع السحري القطري الفردي	رتبة المربع السحري القطري الزوجي (المضاعف – الفردي)
-1, -3	3	2	–	6
-1, -3	15	4	5	10
-1	49	6	7	14
-1, -3	189	8	9	18
-1, -3	1023	10	11	22
-1, -3	4095	12	13	26
-1, -3	10125	14	15	30
-1, -3	65025	16	17	34

من الجدول أعلاه استنتجنا ما يلي:

1) القيمة العددية لمحدد المصفوفة المهيمنة قطريا يكون موجباً.
2) القيمة العددية لمحدد المصفوفة المهيمنة قطريا يقبل القسمة على رتبة المصفوفة مضافا اليه العدد واحد .
3) القيمة العددية لمحدد المصفوفة المهيمنة قطريا يزداد بازدياد رتبة المصفوفة.
4) القيم الذاتية الحقيقية للمصفوفة المهيمنة قطريا تحتوي في الغالب على العددين (-1) و (-3)، ولكن تحتوي على (-1) دائما.

المصادر: References

➢ **المراجع العربية:**

1- انتون، هوارد، **الجبر الخطي المبسط**، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1982م.

2- ليبيشتز، سيمور، **الجبر الخطي**، ط5، ترجمة سلسلة ملخصات شوم، دار الدولية للنشر، القاهرة، مصر، 1999م.

➢ **المراجع الاجنبية:**

3- Anton, H., **Elementary Linear Algebra**, 7th Edition, Jon Wiley, New York, 1994.

4- Horen, R. & Johnson, C., **Matrix Analysis**,9th Edition, Cambridge University Press, New York, 1996.

5- William, A. S., **Magic Squares and Groups**, Inst. Math. Appl., 27, 1991.