

مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

أ.م.د. عماد حازم عبودي / جامعة بغداد / كلية الإدارة والاقتصاد
م.م. وفاء جعفر حسين / جامعة واسط / كلية الإدارة والاقتصاد

تاريخ التقديم: 2018/6/3
تاريخ القبول: 2018/7/9

المستخلص:

تركز الاهتمام في هذا البحث على تقدير المعالم الثابتة والمتغيرة زمنياً في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية والتي لا تمتلك صيغ حلول تحليلية متجنبين الشرط الابتدائي والحل العددي الذي سيؤدي بدوره إلى الكلفة الحسابية العالية عند تقدير المعلمات المجهولة لهذه النماذج، حيث تم التقدير بطريقة متسلسلة من عدة مراحل يتم في المرحلة الأولى تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها بطريقة الشرائح الجزئية وفي المرحلة الثانية تم استعمال طريقة المربعات الصغرى الزائفة لتقدير المعالم الثابتة أما في المرحلة الثالثة يتم تقدير ما تبقى من معالم ثابتة والمعالم المتغيرة زمنياً وذلك بوضعها بنموذج انحدار شبه معلمي ومن ثم مقارنة هذه الطريقة مع الطرائق التي تعتمد على التفريق العددي التي تتضمن مرحلتين حيث يتم في المرحلة الأولى تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها بطريقة الشرائح الجزئية وفي المرحلة الثانية يتم استعمال طرائق التفريق العددي (طريقة اويلر للتفريق العددي وطريقة شبه المنحرف للتفريق العددي) حيث تمت المقارنة باستعمال المحاكاة وبينت النتائج تفوق الطريقة المستندة على شبه المنحرف للتفريق العددي حيث أعطت أفضل المقدرات لموازنتها بين الدقة في التقدير والكلفة الحسابية العالية .

المصطلحات الرئيسية للبحث / المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية ، الشريحة الجزئية، اويلر للتفريق العددي، شبه المنحرف للتفريق العددي، الانحدار اللامعلمي ، الانحدار شبه المعلمي .



مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 108 المجلد 24
الصفحات 454-473

*البحث مستل من أطروحة دكتوراه



1- المقدمة Introduction

العمليات الديناميكية في شتى مجالات العلوم يمكن وصفها بنماذج ديناميكية تتمثل بمنزومة من المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية (Non-linear Ordinary Differential Equation (ODE)) وتختلف هذه النماذج بحسب طبيعة العملية قيد البحث حيث تتم نمذجة هذه الأنظمة من المعادلات بحيث تحتوي على أكبر قدر من سلوك العملية الديناميكية. تتميز هذه النماذج باحتوائها على معلمات مجهولة غالباً ما تكون ثابتة أو تتغير بمرور الزمن بحسب طبيعة العملية المدروسة ويستوجب تقدير هذه المعلمات من البيانات المشاهدة [9] ، في حالة توفر الحل المغلق لنماذج المعادلات التفاضلية يمكن استعمال نماذج الانحدار اللاخطي Nonlinear Regression Models او نماذج انحدار المعاملات المتغيرة زمنياً Time [17] Varying Coefficient Regression Models وحيث ان معظم هذه النماذج من المعادلات لا تمتلك صيغ حلول مغلقة لذا يتم اللجوء الى خوارزميات الحل العددي التكراري وذلك للحصول على مقدرات المربعات الصغرى اللاخطية، وكما هو معلوم ان كل تكرار في هذه الطريقة ينطوي على عمليات تكامل عديدة وهذا بدوره سوف يؤدي الى الكلفة الحسابية العالية من جانب اخر يجب ان تتوفر الشروط الأولية او الحدية للمتغير، ولتجنب الكلفة الحسابية العالية ومشكلة القيمة الأولية ، تم اللجوء الى الطرائق التي تستعمل التقدير اللامعلمي لمتغير الحالة ومشتقته حيث ان هذه الطرائق لا تحتاج الحل العددي المتكرر للمعادلات التفاضلية ولا تحتاج الى القيم الابتدائية لمتغير الحالة كما انها تحسن الكفاءة والاستقرارية في طرائق الامثلية كذلك البحث في إيجاد الطرائق التي توازن بين الكلفة الحسابية والدقة في التقدير. يتضمن هذا البحث وصف نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية. حيث يتم تقدير متغير الحالة ومشتقته بالطرائق الممهدة اللامعلمية أولاً ومن ثم استعمال هذه المقدرات الممهدة للحصول على تقدير المعلمات المجهولة [7].

لقد تم استعمال عدة طرائق لتقدير المعالم المجهولة في نماذج ODE اللاخطية وهي الطريقة المتعددة المراحل Multistage Smoothing –Based (MSSB) ويتم فيها تقدير المعلمات الثابتة والمتغيرة الزمن بثلاث مراحل والطرائق التي تستند الى خوارزميات التفريق العددي وهي طريقة اويلر للتفريق العددي Trapezoidal Euler Ddiscretization Method (DEL) وطريقة شبه المنحرف للتفريق العددي (DTR) Numerical Distraction Method (DTR) ولقد تمت المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال معيار المقارنة معدل الخطاء النسبي (ARE) Average Relative Error وذلك للحصول على افضل النتائج وبدقة عالية.

1-1 مشكلة البحث

يتم تمثيل النماذج الديناميكية بانظمة من المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية وفي الغالب تحتوي هذه النماذج معلمات مجهولة كما ان معظم هذه النماذج من المعادلات لا تمتلك صيغ حلول مغلقة Close Form Solutions لذا يتم اللجوء الى الخوارزميات التكرارية للحل العددي للحصول على حل عددي مقارب للحل الصحيح لهذه الأنظمة من المعادلات وعادة ما تعتمد طرائق تقدير المعلمات في هذه الأنظمة على هذه الخوارزميات التكرارية وهذا يتسبب في الكلفة الحسابية العالية وعدم الاستقرار ومشاكل التقارب ولا سيما في حالة كون المعلمات عالية الابعاد فضلاً عن حاجتها الى الشرط الابتدائي او القيم الحدية للمتغير والتي غالباً ما تكون مجهولة.

2-1 هدف البحث

يهدف البحث الى إيجاد افضل طرائق التقدير التي تتميز بالموازنة بين كفاءة التقدير و بين الكلفة الحسابية للمعلمات المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية دون اللجوء الى الحل العددي لهذه النماذج ومقارنة هذه الطرائق مع الطرائق الكلاسيكية التي تعتمد التقدير اللامعلمي الممهدة لمتغير الحالة ومشتقته وذلك باستعمال المعيار الاحصائي (ARE) Average Relative Error لمقدرات معلمات النموذج لغرض المقارنة بين افضلية طرائق التقدير والتوصل الى افضلها.



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

(2) نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية Ordinary Differential Equations

Nonlinear Models(ODE)

تعد المعادلات التفاضلية من اهم الأدوات الرياضية المستعملة في تكوين النماذج الديناميكية في العلوم الفيزيائية والبيولوجية والهندسية وفي الآونة الأخيرة تم استعمال نماذج المعادلات التفاضلية وتوضيح العمليات البيولوجية مثل الديناميكية الفايروسية للأمراض المعدية ، على سبيل المثال تم استعمال نماذج (ODE) اللاخطية لقياس ديناميكية فايروس نقص المناعة البشرية ، وفايروسات الكبد الوبائي بانواعه المختلفة ولقد أدت الى اكتشافات علمية هامة . ومع ذلك اكثر نماذج (ODE) اللاخطية تستعمل مع تركيبة من البيانات المشاهدة للتقدير والاستدلال الاحصائي للمعالم المجهولة في هذه النماذج. [14:pp2]

ويعبر عن المعادلات التفاضلية بعلاقة مساواة بين المتغير المستقل وهو t والمتغير التابع وهو $x(t)$ حيث تسمى هذه المعادلة التفاضلية بالعادية أي ان المتغير التابع هو دالة في المتغير المستقل ولا تحتوي الا على مشتقات عادية. [8]

ان الشكل العام للنموذج الديناميكي المتمثل بنظام المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية يمكن اعطاءه من خلال متغير الحالة $x(t)$ State Variable بالمجال g حيث ان $x(t) \in \mathbb{R}^n$ في الفترة الزمنية $t \in [t_0, T]$ وهو الحل الوحيد والقابل للاشتقاق لمشكلة القيمة الأولية

$$X^{(1)}(t) = f\{X(t), t, \theta\} \quad X(t_0) = X_0 \quad \forall t \in [t_0, T] \dots (1)$$

اما نماذج (ODE) اللاخطية التي تمتلك معاملات ثابتة ومتغيرة زمنيا فيمكن التعبير عنها كالآتي:

$$X^{(1)}(t) = f(X(t), t, \theta, \gamma(t)), \quad t \in [t_0, T] \dots (2)$$

حيث ان θ متجه المعلمات الثابتة المجهولة بالبعد d

$X(t)$: وهو متجه متغيرات الحالة (state variables) بالبعد g

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_g(t)\}^T$$

$\gamma(t)$: متجه المعالم المتغيرة زمنيا (في النموذج الذي سيتم الاعتماد عليه في هذا البحث ستكون لدينا معلمة واحدة متغيرة الزمن).

$f(\cdot)$: متجه الدوال التفاضلية التي تكون صيغها معلومه والتي تكون خطية او لا خطية (في هذا البحث

$$f(\cdot) = [f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_r(\cdot)]^T$$

ستكون الدوال لاخطية) حيث $x(t_0) = x_0$ القيمة الابتدائية (يفترض ان تكون معلومه في هذا البحث)

حيث ان الجانب الأيمن من المعادلة (1), (2) يعتمد على المعلمة θ وبصورة عامة الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق بالنسبة الى متغير الحالة $X(t)$ وموجهات المعاملات. [16:pp2:3]

لتكن $Y(t)$ تشير الى بيانات القياس حيث لا يمكن قياس $X(t)$ بدقة وبصورة مباشرة بدلا من ذلك يمكن قياس البديل $Y(t)$ حيث يمكننا ان نضع النموذج الذي يوضح العلاقة بين $X(t)$ والبديل $Y(t)$ حيث يستند تقدير المعالم المجهولة على هذا النموذج .

$$Y(t_i) = X(t_i) + e(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \dots (3)$$

حيث أخطاء القياس $e(t_1), e(t_2), \dots, e(t_n)$ مستقلة بمتوسط يساوي صفر ومصنوفة تباين وتباين مشترك

و لتقدير الانموذج ضمن اطار وجود خطأ بالقياس في نماذج الانحدار بسبب ان النموذج (3) يفترض ان متغير الحالة State variable يقاس مع التشويش (الضوضاء) فيكون بالامكان استعمال طرائق التمهيد اللامعلمية لتقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها. [10:p:1:2]



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

1-2 طرائق التقدير Estimation method

قبل البدء بتقدير المعلمات المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية هنالك شرط مسبق لكي يكون تقدير المعلمات مقبولا الا وهو التشخيص المسبق **Priori Global Identifiability** وهو خاصية ترتبط بتفرد الحل للمعاملات المجهولة في النموذج. [1:pp55]

ويمكن تمييز نوعين من التشخيص الأول هو التشخيص النظري **Theoretical Identifiability** او الرياضي (Mathematical) وهذا النوع من التشخيص يتمثل بتشخيص المعلمات في نماذج ODE اللاخطية تحت افتراض القياس الأمثل (عدم وجود خطأ في القياس) . اما النوع الثاني من التشخيص هو التشخيص العملي **Practical Identifiability** او الاحصائي (Statistical) وهو دراسة فيما اذا كانت المعلمات في نماذج ODE قابلة للتشخيص في حالة وجود الضوضاء مع البيانات التي يتم قياسها وعندئذ يمكن تقدير المعلمات المجهولة في نموذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية ضمن طرائق التقدير قيد الدراسة. [13:pp4]

يمكن تمييز فئتين من طرائق تقدير المعلمات الفئة الأولى والتي تسمى بالطرائق التكرارية او الغير مباشرة مثل طريقة المربعات الصغرى اللاخطية **Nonlinear Least Square (NLS)** والتي تستعمل الحل العددي المتكرر وطرائق الامثلية **Optimization Methodes** وتعاب هذه الطرائق بالكلفة الحسابية وعدم الاستقرار كذلك قد تكون مقدرات المعلمات متحيزة عند استعمال عينات صغيرة. [14:pp21]

ولتجنب هذه المشاكل يتم اللجوء الى الفئة الثانية من طرائق التقدير والتي تسمى بالطرائق غير تكرارية او المباشرة والتي لاتعتمد الحل العددي والقيمة الأولية في التقدير والتي سيتم التطرق لها لاحقا. ان انموذج المعادلات التفاضلية الذي سيتم اعتماده في هذا البحث هو انموذج الدينامية الفايروسية للأمراض الفيروسية المعدية [9:pp:641][16:pp5].

$$\frac{dX_t(t)}{dt} = \lambda - \rho X_t(t) - \gamma(t) X_t(t) X_V(t) \dots \dots (4)$$

$$\frac{dX_I(t)}{dt} = \eta(t) X_t(t) X_V(t) - \delta X_I(t) \dots \dots (5)$$

$$\frac{dX_V(t)}{dt} = N \delta X_I(t) - c X_V(t) \dots \dots (6)$$

حيث ان $X_t(t)$: هو تركيز خلايا $CD_4 + T$ المستهدفة من قبل الفايروس غير المصابة
 $X_I(t)$: هو تركيز خلايا $CD_4 + T$ المصابة بالفايروس
 $X_V(t)$: الحمل الفايروسي (كمية الفايروس في بلازما الدم)
 λ : معدل تكاثر خلايا $CD_4 + T$ غير المصابة
 ρ : معدل وفاة خلايا $CD_4 + T$ غير المصابة
 $\gamma(t)$: معدل العدوى المتغيرة بمرور الزمن اعتمادا على فعالية العقاقير المضادة للفايروسات
 δ : معدل وفاة خلايا $CD_4 + T$ المصابة
 c : معدل إزالة virions
 N : عدد virions التي تنتجها الخلية المصابة المفردة كمعدل
حيث ان: $X_t(t), X_I(t), X_V(t)$ هي متغيرات الحالة State variables
 $[\lambda, \rho, \delta, c, N, \gamma(t)]^T$: المعلمات المجهولة الثابتة والمتغيرة الزمن المطلوب تقديرها
وفيما ياتي استعراض لطرائق تقدير المعلمات المجهولة قيد البحث لنماذج ODE اللاخطية .



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

(1-1-2) الطريقة المتعددة المراحل (MSSB)-Based Multistage Smoothing

تستعمل الطريقة المتعددة المراحل لاستخلاص التقديرات من جميع المعلمات الديناميكية في نموذج ديناميكي لفايروس الوبائي هذا الأسلوب يحتوي على انحدار معلمي وغير معلمي وشبه معلمي ويتجنب الحل العددي لنماذج ODE اللاخطية ولا يتطلب قيم ابتدائية لمتغيرات الحالة كذلك فإن هذه الطريقة هي طريقة عامة لتقدير المعلمات في نماذج ODE اللاخطية المختلفة , على الرغم من ان المقدرات على أساس هذه الطريقة لديها بعض الصفات المميزة في الخصائص التقريبية توجد بعض القيود على هذه الطريقة على وجه الخصوص عند تقدير مشتقات متغيرات الحالة التي تتأثر بقياس التشويش (الضوضاء) عندما تكون البيانات مبعثرة وهذا ينتج مقدرات متحيزة للمعاملات [9:PP467].
بصورة عامة ويمكن تلخيص مراحل هذه الطريقة كما يأتي:

المرحلة الأولى تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها بطريقة الشرائح الجزئية (Penalized spline):

لقد استعمل الباحث Liang (2010) [9] طريقة الانحدار الموضوعي المتعدد لتقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها في هذه المرحلة من هذه الطريقة سوف نوظف طريقة الشرائح الجزئية (P Spline) Penalized Splines لتقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها في النموذج المعمول به في هذا البحث حيث تم اعتماد هذه الطريقة في التقدير كونها تتميز بالمرونة في تركيب أنواع مختلفة من المنحنيات ولديها الهيئة في التسوية بين الانحدار وتمهيد الشرائح Spline Smoothing كذلك لديها الكفاءة الحاسوبية العالية مقارنة مع طريقة الانحدار الموضوعي المتعدد [17]. سيتم في هذه المرحلة تقدير كل من $X_V(t)$, $X_V^{(1)}(t)$, $X_T(t)$, $X_T^{(1)}(t)$ والتي تكون مقدراتها بالتتابع $\bar{X}_V(t)$, $\bar{X}_V^{(1)}(t)$, $\bar{X}_T(t)$, $\bar{X}_T^{(1)}(t)$ والتي سوف نحتاجها في المرحلة الثانية وكذلك تقدير المشتقة الثانية للمتغير $X_V(t)$ والتي يعبر عنها بـ $\bar{X}_V^{(2)}(t)$ والتي سوف تستعمل في المرحلة الثالثة. علما بأن $X_T(t) = X_t(t) + X_1(t)$ [9]. ان الفكرة الأساسية للتمهيد بالشرائح الجزئية أعطت من قبل الباحث (1986) O'Sullivan ثم تطورت من قبل Eilers and Marx (1996) وذلك باستعمال الجزاءات المختلفة penalties مع شرائح (B Spline) حيث سميت الطريقة (P Spline) Penalized Spline . وتعني هذه الطريقة استخدام شرائح (B Spline) مع عقد تكون بمسافات متساوية وعادة ما يكون عددها اقل من عدد البيانات وذلك لتلافي مشكلة نقص التمهيد (Under Smoothing) [3:pp529][17:pp5][15:PP6,7].
سوف نوظف هذه الطريقة في التمهيد لتقدير المنحنى $X(t)$ وكالاتي:
نقوم بتقريب متغير الحالة $X(t)$ بواسطة الطريقة الممهدة اللامعلمية أساس الشريحة B-spline (Basis Spline) حيث تتكون هذه الشرائح من قطع من متعددات الحدود توصل بنقاط تسمى بالعقد knots ولقد وضع De Boor [4:pp90] صيغة تكرارية تم احتساب الشرائح فيها لأية درجة بعد ان عرف الشريحة من الدرجة صفر ويكون تقريب متغير الحالة كالاتي:

$$X(t) \approx \sum_{j=-u}^s \mu_j \beta_{j,u+1}(t)$$

$$= \beta_{u+1}^T(t) \pi \dots \dots \dots (7)$$

حيث ان :

$$\mu = (\mu_{-u}, \dots, \mu_s)$$

$$\beta_{u+1}(t) = [\beta_{-u,u+1}(t), \dots, \beta_{s,u+1}(t)]^T$$

$$u + 1 \text{ مجال } 1 \times (s + u + 1) \text{ وبمتسلسلة من العقد في } [t_0, T].$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = t_{r+2} = \dots = t_{r+u+1} = T$$

$$t_0 = t_{-u} = t_{-u+1} = \dots = t_{-1} =$$

ولقد تم تعريف مصفوفة الشرائح Splines Matrix بالبعد $n \times (r + u + 1)$ كالاتي

$$S = [\beta_{u+1}(t_1), \dots, \beta_{u+1}(t_n)]^T$$

$$Y = \{Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)\}^T$$

ولتكن موجه المشاهدات معطى كالاتي :



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

كما ان تكامل مربع المشتقة الثانية لدوال الأساس يعطى كالآتي :

$$D = \int_{t_0}^T \beta_{u+1}^{(2)}(t) [\beta_{u+1}^{(2)}]^T dt$$

عندئذ يمكن الحصول على مقدر الشريحة الجزائية لمتغير الحالة $X(t)$ وذلك بتصغير دالة الهدف الآتية

فان مقدر الشريحة الجزائية $\hat{x}(t)$ لمتغير الحالة $x(t)$ يمكن الحصول عليه بتصغير دالة الهدف الآتية :

$$ss(X) = (Y - S\mu)^T (Y - S\mu) + \lambda \mu^T D_q \mu \dots \dots \dots (8)$$

حيث λ هي معلمة التمهيد وسيتم اختيارها بطريقة التقاطع الشرعي المعمم Generalized Cross Validation Method . عند تصغير دالة لهدف (8) سوف نحصل على:

$$\hat{\mu} = (S^T S + \lambda D_q)^{-1} S^T Y \dots \dots \dots (9)$$

عندها يمكن الحصول على متغير الحالة كالآتي :

$$\hat{X}(t) = [\beta_{u+1}]^T \hat{\mu} \dots \dots \dots (10)$$

كذلك يمكن الحصول على مقدرات مشتقات متغير الحالة $\hat{x}^{(i)}(t)$ وكالآتي

$$\frac{\partial i}{\partial t^i} \hat{X}(t) = [\beta_{u+1}^{(i)}(t)]^T \Delta_i \hat{\mu} \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots (11)$$

حيث ان $\hat{X}^{(0)}(t) = \hat{X}(t)$, $X^{(0)}(t) = X(t)$

المرحلة الثانية (تقدير المعلمات الثابتة بطريقة المربعات الصغرى الزائفة):

Estimation the Constant Parameters By Pseudo-Least Squares

بعد ان تم تقدير متغيرات الحالة ومشتقتها بطريقة جزاء الشرائح سوف يتم استعمال هذه المقدرات في هذه المرحلة لتقدير المعلمات الثابتة باستعمال طريقة المربعات الصغرى الزائفة Pseudo-Least Squares كون البيانات هي بيانات ممهدة بالطريقة اللامعلمية (P Spline). بصورة عامة من النموذج (2) سوف نحصل على نموذج الانحدار الآتي :

$$\bar{X}^{(1)}(t) = f\{t, X(t), \beta\} + \varepsilon^*(t_i) \dots \dots \dots (12)$$

حيث ان $\varepsilon^*(t_i)$ يعبر عن متجه خطأ الاستبدال أي ان $\varepsilon^*(t_i) = \bar{X}^{(1)}(t) - X^{(1)}(t)$ اذا كان $\bar{X}^{(1)}(t)$ هو مقدر غير متحيز الى $X^{(1)}(t)$ فان $\varepsilon^*(t_i)$ هي أخطاء بمتوسط صفر لكنها غير مستقلة ومع ذلك اذا كان المقدر $\bar{X}^{(1)}(t)$ متحيزا (مثلا اذا قدر بإحدى طرائق التقدير الممهدة اللامعلمية كالمقدر الموضوعي المتعدد Local Polynomial Estimation او طريقة الشرائح الجزائية penalized splines (p splines) الواردة في المرحلة الأولى) فان متوسط الأخطاء العشوائية سوف يكون لايساوي صفر. اذن $\varepsilon^*(t_i)$ تختلف عن خطأ القياس التقليدي فيما عدا ذلك اذا استبدلنا $X(t)$ بـ $Y(t)$ في النموذج (3) فان تقديرات المعلمات سوف تكون متحيزة والخيار الأفضل والبديل هو الاستعاضة بـ $X(t)$ حسب تقديرها وهذه الفكرة مشابهة أساسا لاسلوب Regression Calibration في نماذج أخطاء القياس حيث ان متغير الحالة $X(t)$ هو الحل لنماذج ODE حيث يتم استبدال المتغير الذي يكون عرضة للخطأ $X(t)$ بالمقدر الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى بطريقة الشرائح الجزائية. [10:pp1571]

ونعني بفكرة Regression Calibration هو استبدال المتغيرات غير المشاهدة (التي تقاس مع وجود الخطأ) بقيمها المقدره بالطرائق اللامعلمية فتكون أخطاء القياس معدلة وذلك لتأخذ بالحسبان تقدير هذه المتغيرات [6:PP2]

حيث سوف تطبق طريقة المربعات الصغرى الزائفة (Pseudo-Least Squares (PsLS) لتقدير المعلمات الثابتة في نظام المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية وذلك بتعويض المقدرات الممهدة لمتغيرات الحالة ومشتقاتها التي حصلنا عليها في المرحلة الأولى في المعادلة (2) لنحصل على تقدير θ من تصغير دالة الهدف الآتية :



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير
المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

$$\min_{\theta} = \sum_{i=1}^n [\bar{X}^{(1)}(t) - f\{t, \bar{X}(t), \theta\}]^2 \dots \dots \dots (13)$$

حيث ان $\theta \in \Omega_{\theta}$ يمثل مجال المعلمة من المعادلة (13) نلاحظ ان $\bar{X}^{(1)}(t), \bar{X}(t)$ هي ليست البيانات المشاهدة بل هي متغيرات ممهدة لمتغير الحالة $X(t)$ ومشتقاته وكما هو معروف ان مشتقة المتغير غير مستقلة التوزيع ولهذا فان مقدرات المعلمة الثابتة التي نحصل عليها بتصغير دالة الهدف (13) هي ليست مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية بل تسمى مقدرات المربعات الصغرى الزائفة Pseudo-Least Squares Estimators PsLS يتم استعمال الية الانحدار الخطي للحصول مقدرات المربعات الصغرى الزائفة اذا كانت الدالة $f(\dots)$ خطية اما اذا كانت هذه الدالة لا خطية ممكن استعمال برامج الحزم الاحصائية لإيجاد هذه المقدرات، نكون بحاجة تمهيد مقدر مشتقة الدالة $\bar{X}^{(1)}(t)$ كمتغير استجابة وممهد مقدر متغير الحالة $\bar{X}(t)$ كمتغيرات مشاهدة في نقاط الوقت $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ [10:pp1573].
وحتى تطبق هذه المرحلة على نماذج المعادلات (4)(5)(6) يجب اجراء العمليات الحسابية الاتية
تدمج (4) مع (5) ونحصل على :

$$\frac{d}{dt} [X_T(t) + X_I(t)] = \lambda - \rho X_T(t) - \delta X_I(t) \dots \dots \dots (14)$$

ولیکن $X_T(t) = X_T(t) + X_I(t)$

$$\frac{d}{dt} X_T(t) = \lambda - \rho [X_T(t) - X_I(t)] - \delta X_I(t)$$

$$\frac{d}{dt} X_T(t) = \lambda - \rho X_T(t) + \rho X_I(t) - \delta X_I(t)$$

$$\frac{d}{dt} X_T(t) = \lambda - \rho X_T(t) + (\rho - \delta) X_I(t)$$

$$\frac{d}{dt} X_T(t) - \lambda + \rho X_T(t) = X_I(t) (\rho - \delta)$$

$$X_I(t) = \frac{-\lambda}{(\rho - \delta)} + \frac{\rho}{(\rho - \delta)} X_T(t) + \frac{1}{(\rho - \delta)} \frac{d}{dt} X_T(t)$$

$$X_V^{(2)}(t) = \frac{d^2 X_V(t)}{dt^2} \text{ و } X_V^{(1)}(t) = \frac{d X_V(t)}{dt} \text{ و } X_T^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} X_T(t) \text{ لتكن}$$

وبالتعويض بالمعادلة (6) نحصل على

$$X_V^{(1)}(t) = N\delta \left(\frac{-\lambda}{(\rho - \delta)} + \frac{\rho}{(\rho - \delta)} X_T(t) + \frac{1}{(\rho - \delta)} X_T^{(1)}(t) \right) - c X_V(t) \dots \dots (15)$$

$$X_V^{(1)}(t) = \omega_0 + \omega_1 X_T(t) + \omega_2 X_T^{(1)}(t) - c X_V(t) \dots \dots \dots (16)$$

حيث ان :

$$\omega_0 = \frac{-N\delta\lambda}{(\rho - \delta)}, \quad \omega_1 = \frac{N\delta\rho}{(\rho - \delta)}, \quad \omega_2 = \frac{N\delta}{(\rho - \delta)}$$

لتكن $\bar{X}_T^{(1)}(t), \bar{X}_V^{(1)}(t), \bar{X}_T(t), \bar{X}_V(t)$ مقدرات كل من $X_T^{(1)}(t), X_T(t), X_V^{(1)}(t), X_V(t)$ بالتتابع والتي حصلنا عليها في المرحلة الأولى ، وبتعويض هذه المقدرات في (16) سوف نحصل على نموذج الانحدار الخطي الاتي [10:PP1576]

$$\bar{X}_V^{(1)}(t) = \omega_0 + \omega_1 \bar{X}_T(t) + \omega_2 \bar{X}_T^{(1)}(t) - c \bar{X}_3(t) + \varepsilon^{**}(t) \dots \dots \dots (17)$$



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

حيث $\epsilon^{**}(t)$ يتضمن كل أخطاء التعويض سوف يصبح النموذج نموذج انحدار قياسي ومن الممكن إيجاد مقدرات المعلمات الثابتة، سوف نستخدم المربعات الصغرى الزائفة Pseudo-least squares estimation لتقدير $\omega_0, \omega_1, \omega_2, c$ ويمكن استنتاج: $\rho = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \lambda = \frac{-\omega_0}{\omega_2}$, بهذا نستطيع تقدير ρ, λ, c من النموذج (17) [9]

المرحلة الثالثة استخدام الانحدار شبه المعلمي لتقدير ما تبقى من المعلمات الثابتة والمعلمة المتغيرة الزمن Semiparametric Regression For Estimation Of Both Constant And Time-Varying Parameters.

في هذه المرحلة سيتم تقدير ما تبقى من المعلمات الثابتة N, δ والمعلمة المتغيرة الزمن $\gamma(t)$ وكالاتي:
من المعادلة (4) نحصل على:

$$\frac{d}{dt} X_I(t) = \gamma(t) \{X_T(t) - X_I(t)\} X_V(t) - \delta X_I(t) \dots \dots \dots (18)$$

وبإيجاد المشتقة الثانية للمعادلة (6) نحصل على

$$X_V^{(2)}(t) = N\delta X_I^{(1)}(t) - cX_V^{(1)}(t)$$
$$X_I^{(1)}(t) = \frac{X_V^{(2)}(t) + cX_V^{(1)}(t)}{N\delta} \dots \dots \dots (19)$$

وبالرجوع الى المعادلة (6) نحصل على :

$$X_I = \frac{X_V^{(1)} + cX_V}{N\delta} \dots \dots \dots (20)$$

نعوض المعادلة (5) والمعادلة (18) والمعادلة (20) في المعادلة (19) نحصل على المعادلة الاتية :

$$X_V^{(2)}(t) + cX_V^{(1)}(t) = \gamma(t) N\delta X_I(t) X_V(t) - \gamma(t) [X_V^{(1)}(t) X_V(t) + cX_V(t)^2] - \delta [X_V^{(1)}(t) + cX_V(t)] \dots \dots \dots (21)$$

نعوض متغيرات الحالة والمعلمات الثابتة التي قدرت في المرحلتين الأولى والثانية من المعادلة (21) يمكن صياغة نموذج انحدار شبه معلمي للمعاملات المتغيرة الزمن كالاتي [9:PP467]:

$$Z(t) = V_1(t)\delta + V_2(t)\gamma(t) + V_3(t)N\delta\gamma(t) + \Delta^*(t) \dots \dots \dots (22)$$

حيث ان :

$$Z(t) = \bar{X}_V^{(2)}(t) + c\bar{X}_V^{(1)}(t) \quad , \quad V_1(t) = -[\bar{X}_V^{(1)}(t)\bar{X}_V(t) + c\bar{X}_V(t)^2] \quad ,$$
$$V_2(t) = [\bar{X}_V^{(1)}(t) + c\bar{X}_V(t)] \quad , \quad V_3(t) = [\bar{X}_T(t)\bar{X}_V(t)]$$

نلاحظ ان النموذج (21) هو نموذج شبه معلمي لنموذج معاملات متغيرة الزمن (Sime Parametric Time-Varying Coefficient Models) حيث $Z(t)$ متغير قيم الاستجابة عند الزمن t وان $V_1(t), V_2(t), V_3(t)$ المتغيرات التوضيحية المراد تقدير تأثيرها على متغير الاستجابة $Z(t)$ وان $N\delta\gamma(t), \gamma(t)$ تمثل معاملات المتغيرات التوضيحية في معادلة الانحدار والتي هي عبارة عن دالة في المتغير t حيث ان المتغير t يؤثر في هذه المعاملات مما يجعلها متغيرة زمنيا اما $\Delta^*(t)$ يضم جميع أخطاء التعويض بمتوسط صفر وتباين ثابت ، في هذا البحث سيتم تقريب المعلمة المتغيرة زمنيا بطريقة B-spline وذلك لمميزات هذه الطريقة وسهولة حسابها ودقتها.
حيث تحول المعلمة المتغيرة زمنيا بطريقة B-Spline كماياتي:

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^l m_j B_{j,k}(t) = B^T m \dots \dots (23)$$



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

حيث ان :

m_j : معاملات B- spline الثابتة

$B_{j,k}(t)$: دوال الأساس للرتبة k ، النموذج (22) يمكن ان يكتب بشكل تقريبي

$$Z(t) = V_1(t)\delta + \sum_{j=1}^l \{B_{j,k}(t)V_2(t)\}m_j + \sum_{j=1}^l \{B_{j,k}(t)V_3(t)\}N\delta m_j + \Delta^*(t) \dots \dots (24)$$

سوف يصبح النموذج نموذج انحدار قياسي ومن الممكن إيجاد مقدرات المعلمات الثابتة

$\delta, m_j, N\delta$ اما اختيار رتبة B- spline سوف نجدها من خلال يتم استعمال

معياري اكيك AICc لتعيين الرتبة وعدد العقد وكالاتي

$$AICc = N \ln \left(\frac{RSS}{N} \right) + \frac{2NK}{N-K-1} \dots \dots \dots (25)$$

حيثان RSS : مجموع مربعات البواقي يتم الحصول عليه بطريقة (المربعات الصغرى اللاخطية) .

N: تمثل مجموع المشاهدات

K: فهي عدد المعلمات المجهولة في نموذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية. [12:pp7]

عندئذ يصبح نموذج الانحدار نموذج خطي يحتوي على معالم ثابتة فقط يقدر بالطرائق الاعتيادية

(2-1-2) **طرائق التقدير القائمة على التفريق العددي** : Numerical Discretization –Based

Estimation Methods

وهي من فئة طرائق تقدير المعلمات المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية تستند هذه ال2طرائق على شكل خوارزميات التفريق العددي Discretization Numerical Algorithms ولهذه الطرائق بعض الفوائد من حيث الكفاءة الحسابية والدقة في التقدير مقارنة مع الطرائق الأخرى حيث توفر هذه الفئة من الطرائق نظام مرن في التوازن بين الكلفة الحسابية وصحة التقدير .

تقسم هذه الفئة من الطرائق الى مرحلتين في المرحلة الأولى يقدر متغير الحالة كدالة ممهدة للزمن بالطرائق اللامعلمية الممهدة سوف نختار طريقة الشرائح الجزائية (p spline) وفي المرحلة الثانية نستخدم مخططات خوارزميات التفريق العددي لـ ODE اللاخطية لتشكيل نموذج يشبه الانحدار لربط متغيرات الحالة الممهدة في المرحلة الأولى لهذه الطريقة لمتجه المعلمات المجهولة θ من خلال الدالة f ثم يتم تطبيق تقنية الامثلية القياسية على نموذج شبيه الانحدار Regression-like للحصول على تقديرات المعلمات يتم استخدام شبيه الانحدار على البيانات الزائفة الناتجة من متغيرات الحالة المقدره في المرحلة الأولى للحصول على المعلمة النهائية [17:PP21] .

ويمكن تلخيص خطوات الطريقة كالاتي:

المرحلة الأولى : تقدير متغير الحالة $X(t)$ ومشتقاته باستخدام penalized splines (p splines) كما تم شرحه في المرحلة الأولى من الطريقة المتعددة الماحل .

المرحلة الثانية: بعد تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها ومن خلال طرائق التفريق الخطوة الواحده one-step discretization methods نحصل على :

$$\frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = F(t_i, X(t_i), X(t_{i+1}), \theta_0) + O(h^p) \quad i = 1, \dots, n - 1 \dots (26)$$

حيث : h اكبر $h_i = t_{i+1} - t_i$, $h = O(n^{-1})$, والصيغة $F(t_i, X(t_i), X(t_{i+1}), \theta_0)$ والرتبة P تحدد بطريقة التفريق discretization method سوف نفترض طريقتين للتفريق:

أولاً: طريقة اويلر Eulers Method سيتم في هذه الطريقة إعطاء الثابت h (حجم الخطوة) قيما

صغيرة بحيث يمكن ان نحذف حدود سلسلة تايلر ابتداء من الحد الذي يحتوي $X^{(2)}(t)$ من سلسلة تايلور

وكالاتي. [8:PP21]



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير
المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

$$X(t+h) = X(t) + hX^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2!} X^{(2)}(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} X^{(n)}(t) \dots \dots \dots (27)$$

ويتم حذف الحدود اعتبارا من الحد $\frac{h^2}{2!} X^{(2)}(t)$ ينتج: [11:PP21]

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + h_i f(t_i, X(t_i), \theta_0) \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \dots \dots \dots (28)$$

أي ان الصيغة $F(t_i, x(t_i), x(t_{i+1}), \theta_0)$ لقانون اويلر هي $f(t_i, X(t_i), \theta_0)$
ثانيا: trapezoidal rule عندما $p=1$ فإن: [17:pp31]

$$F(t_i, X(t_i), X(t_{i+1}), \theta_0) = 0.5 [f(t_i, X(t_i)) + f(t_{i+1}, X(t_{i+1}), \theta_0)] \dots \dots \dots (29)$$

نعوض متغير الحالة $X(t_i)$ بمقدره الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى $\bar{X}(t_i)$ تصبح المعادلة (26)
كالآتي :

$$\frac{\bar{X}(t_{i+1}) - \bar{X}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = F(t_i, \bar{X}(t_i), \bar{X}(t_{i+1}), \theta_0) + \Gamma_i \dots \dots \dots (30)$$

حيث Γ_i مجموع أخطاء الفروقات العددية واطءاء التقدير للمرحلة الأولى. [7:PP1236]
ومن الجدير بالذكر ان أخطاء التقدير تنتج من استبدال متغيرات الحالة State Variables بمقدراتها
وكالاتي :

Euler $O(h) = X^{(1)}(t_i) - \bar{X}^{(1)}(t_i)$ ومما يجب ملاحظته ان رتبة الخطأ العددي لطريقة اويلر
Trapezoidal method ($p=1$) تساوي رتبة خطأ التقدير ورتبة الخطأ العددي لطريقة شبه المنحرف
Rule ($p=2$) وتعمد دقة الخوارزمية العددية على رتبة الخطأ العددي مقارنة مع رتبة خطأ القياس حيث
كلما زادت رتبة الخطأ العددي دل ذلك على دقة الخوارزمية العددية [17:PP8]
وبتقليل دالة الهدف الاتية نحصل على مقدرات المعلمات $\bar{\theta}$:

$$SS(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} w(t_i) \left[\frac{\bar{X}(t_{i+1}) - \bar{X}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - F(t_i, \bar{X}(t_i), \bar{X}(t_{i+1}), \theta_0) \right]^2 \dots \dots \dots (31)$$

حيث ان :

$\bar{X}(t_i)$ المقدر لـ $X(t_i)$ الذي تم الحصول عليه بالمرحلة الأولى باستعمال طريقة (p spline)
 $F_j(\cdot)$ هي الدالة المعطاة بواسطة طرائق التفريق العددي
 $w_j(\cdot)$ دالة وزن غير سالبة على $[t_0, T]$.

يتم تقليل دالة الهدف (31) باستعمال خوارزمية L-BFGS-B وهي خوارزمية اذ تعتبر طريقة تحسين
قياسية عندما تكون الدوال ممهدة وتكون لها القابلية على الاشتقاق مرتين وحيث ان هذه الخوارزمية تكرارية
ويمكن درجها في خمس مراحل [5].

أولا : اسقاط التدرج (Gradient projection).

ثانيا : حساب نقطة كوشي المعممة (Generalized Cauchy point calculation).

ثالثا : تقليل المساحة الفرعية (Subspace minimization)

رابعا : خط البحث (Line searching).

خامسا : تقريب ذاكرة هيسيان -المحدودة (limited-memory Hessian approximation.) [5]
ولمزيد من المعلومات حول خوارزمية L-BFGS-B يمكن مراجعة المصدر [2]



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

ولتطبيق هذه الطريقة على نموذج المعادلات التفاضلية المعتمد في هذه الاطروحة وبالرجوع الى المعادلة (11) وبتعويض المقدرات التي حصلنا عليها في المرحلة الاولى في هذه المعادلة أيضا لنحصل على المعادلة :

$$\bar{X}_V^{(1)}(t) \approx \omega_0 + \omega_1 \bar{X}_T(t) + \omega_2 \bar{X}_T^{(1)}(t) - c \bar{X}_V(t) \dots \dots \dots (32)$$

نطبق طريقة التفريق العددي Discretization Method للتقدير الواردة أعلاه لتصبح المعادلة كالآتي :

$$\frac{\bar{X}_V^{(1)}(t_{i+1}) + \bar{X}_V^{(1)}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = F(t_i, \bar{X}_V(t_i), \bar{X}_V(t_{i+1}), \theta_0) + \Gamma_i \dots \dots \dots (33)$$

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} w(t_i) \left[\frac{\bar{X}_V^{(1)}(t_{i+1}) + \bar{X}_V^{(1)}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - F(t_i, \bar{X}_V(t_i), \bar{X}_V(t_{i+1}), \theta_0) \right]^2 \dots \dots \dots (32)$$

لقد قام الباحث (Xue, H.) وآخرون [17] وكذلك الباحث (Hu, T.) وآخرون [7] بتقدير المعلمات الثابتة (ρ, λ, δ) وذلك بتقليل دالة الهدف (32) باستعمال خوارزمية (L-BFGS-B) مع تثبيت المعلمات (N, c) حيث تم الحصول على مقدرات $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ ومن ثم إيجاد العلاقة بين هذه المعلمات للحصول على المعلمات الثابتة $(\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{\delta})$ حيث ان $\hat{\rho} = \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_2}$, $\hat{\lambda} = -\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_2}$,

تقترح الباحثة في هذه الاطروحة تقدير جميع المعلمات الثابتة مع تثبيت المعلمة المتغيرة زمنيا وذلك بتصغير دالة الهدف (32) باستعمال خوارزمية (L-BFGS-B) للحصول على مقدرات جميع المعلمات $(\rho, \lambda, \delta, N, c)$ حيث يتم ادخال قيم مقدرات المعلمات التي حصلنا عليها بطريقة MSSB كقيم أولية $\beta_{MSSB} = (\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{N}, \hat{c})$ ومن ثم حساب دالة الهدف (32) لقيم المعلمات $(\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{N}, \hat{c})$ دون الحاجة الى حساب قيم $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ في المعادلة (32).

وكما بينا سابقا تم تحويل المعلمة المتغيرة الزمن بطريقة (B spline) الى معالم ثابتة (m_1, m_2, \dots, m_l) قد قدرت بالطريقة المتعددة المراحل حيث يتم تثبيتها في هذه المرحلة كموجه ناتج من حاصل جمع موجات دوال الأساس (كل موجة مضروب بمعامل B-Spline الخاص به) وبهذا يتم تقدير جميع معلمات الثابتة في النموذج نموذج المعادلات التفاضلية.

3- الجانب التجريبي

لغرض تطبيق الطرائق التي تم التطرق لها في الجانب النظري من هذا البحث لابد من وضع بعض الافتراضات المهمة للحصول على تحليل اكثر شمولية من خلال استعمال احجام عينات مختلفة واختيار قيم مختلفة لتباين الأخطاء وحيث انه من الصعوبة تطبيق هذه الافتراضات والحصول على احجام العينات في الواقع العملي يتم استعمال الأسلوب التجريبي من خلال تطبيق المحاكاة (Simulation).

(1-3) الجانب التجريبي

يمكن تعريف المحاكاة بانها تمثيل للواقع العملي حيث توظف نماذج تحتوي على عدد كبير من الحالات الافتراضية حتى تكون نتائج التحليل اكثر تعميم وشمولية وبسبب التقدم العلمي في مجال الحاسبات الالكترونية والتطور الحاصل في مجال التحليل العددي تطورت أساليب المحاكاة بما يتماشى مع الواقع العملي. ويمكن توضيح مراحل بناء تجربة المحاكاة Stages of Building Simulation Experiment بثلاثة مراحل مهمة وكالاتي :

المرحلة الأولى : توليد متغيرات الحالة [17] p16 [16] p157 [10] p157 [9] PP471

تحل المعادلات التفاضلية الواردة في الجانب النظري من البحث (4)(5)(6) عدديا بطريقة رونج-كوتا (4- stage Runge-Kutta) وبقيم معلمات أولية استنبطت من البحوث السابقة .

$$X_t(0) = 600 , X_I(0) = 30 , X_V(0) = 10^5 , \lambda = 36 , \rho = 0.108$$



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

$$N = 1000 , \delta = 0.5 , c = 3 , \gamma(t) = 9 * 10^{-5} * \left\{ 1 - 0.9 \cos \left(\frac{\pi t}{1000} \right) \right\}$$

بعد حل نموذج المعادلات التفاضلية بالطريقة العددية سوف نحصل على متغيرات الحالة وكالاتي :

فنحصل على : $X_T(t), X_I(t), X_V(t)$ يتم دمج الخلايا $X_T(t), X_I(t), X_V(t)$

$$X_T(t) = X_I(t) + X_V(t)$$

في هذه المرحلة حصلنا على المتغيرين $X_T(t), X_V(t)$

المرحلة الثانية: توليد الاخطاء العشوائية

يتم في هذه المرحلة توليد الاخطاء العشوائية التي تتوزع طبيعيا بمتوسط صفر وتباين معين σ^2 أي :

$$\varepsilon i1 \sim N(0, \sigma_1^2) , \varepsilon i2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

وسوف يتم استعمال ثلاث مستويات من التباين تضاف لكل متغير وهي مستوى التباين العالي ومستوى

التباين المتوسط ومستوى التباين المنخفض والتي سنذكر لاحقا .

المرحلة الثالثة : يتم حساب المتغير المعتمد $Y(t_i)$ من خلال دمج كل متغير من المتغيرات التي حصلنا

عليها في المرحلة الاولى مع الخطأ العشوائي المولد طبيعيا لينتج :

$$Y_2(t_i) = X_V(t) + \varepsilon i2 , Y_1(t_i) = X_T(t) + \varepsilon i1$$

لقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل والخطوات الاتية لتقدير متغير الحالة في نموذج المعادلات

التفاضلية ODE اللاخطية وتطبيق طرائق التقدير المستعملة في هذا البحث والتي يتم من خلالها تحقيق

الهدف ولقد تم الاعتماد على برنامج (R-3.3.3-pit64) للحصول على النتائج .

حيث يتم اختيار القيم الافتراضية وهي من المراحل المهمة والتي تعتمد المراحل اللاحقة عليها من

اجل تقدير المتغير المعتمد أي ان كل تجربة من التجارب الأربعة وضعت عند ثلاث مستويات من التباين

وحسب حجوم العينات حيث تم اعتماد التباينات الاتية لحجوم العينات الصغيرة $n=30$ و $n=50$ حيث كان

مستويات التباين للمتغير $X_T(t)$ هي $(40^2, 30^2, 20^2)$ ومستويات التباين للمتغير $X_V(t)$ هي

$(100^2, 75^2, 50^2)$. اما لحجوم العينات الكبيرة $n=100$ و $n=200$ فان التباين للمتغير

$X_T(t)$ هي $(40, 30, 20)$ والتباين للمتغير $X_V(t)$ هو $(200, 150, 100)$.

وبعدها تطبق الطرائق الواردة في الجانب النظري ولكافة حجوم العينات ومستويات التباين وهذه

الطرائق:

1. الطريقة المتعددة المراحل باستعمال طريقة الشرائح الجزائية (P spline) لتقدير متغيرات الحالة

ومشتقاتها في انموذج المعادلات التفاضلية حيث سميت الطريقة المتعددة المراحل بـ (MSSB)

2. طريقة التفريق العددي Discretization Method باستعمال صيغة التفريق العددي لطريقة اويلر

(Euler) حيث سميت هذه الطريقة بـ (DEL) .

3. طريقة التفريق العددي باستعمال صيغة التفريق العددي لشبه المنحرف (Trapezoidal rule) حيث

سميت هذه الطريقة بـ (DTR) .

جدول رقم (1): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=30$ ومستويات

تباين مرتفعة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\gamma(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
400	25000	MSSB	31.2478	41.6346	95.2313	22.5810	82.9635
		DEL	10.5387	129.865	54.2934	18.3181	12.3250
		DTR	3.89778	33.3456	45.0854	12.8193	7.6081
900	5625	MSSB	30.6681	52.7689	95.3658	23.3130	83.865



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير
المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

		DEL	17.56432	157.6799	61.5230	20.4743	17.224
		DTR	4.83373	38.2600	47.4213	16.155	8.0989
1600	10000	MSSB	68.9973	68.8076	88.4956	23.575	81.9908
		DEL	17.9379	160.1668	72.5687	23.981	18.5670
		DTR	7.0549	39.9089	50.1734	20.6580	9.0037

جدول رقم (3): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=50$ ومستويات
تباين مرتفعة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
400	25000	MSSB	331.058	37.0096	33.2561	5.0608	4367.67
		DEL	9.7804	79.16234	33.6122	15.467	10.1280
		DTR	3.0703	12.5409	22.665	9.9293	5.22301
900	5625	MSSB	34.69044	51.0709	35.0758	5.09700	67.25080
		DEL	12.1435	80.1057	40.5256	17.2414	11.1893
		DTR	3.7068	13.8609	24.5123	15.7295	6.0001
1600	10000	MSSB	53.421	64.892	38.089	6.2534	68.981
		DEL	15.1925	81.2266	57.5352	19.4771	12.5887
400	25000	DTR	4.8938	16.02298	26.9650	16.8670	6.4584

جدول رقم (3): معدل القيم التقديرية للمعلمات
رقم (3): معدل القيم التقديرية للمعلمات $(\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3)$ وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة
 $n=30$ ومستويات تباين مرتفعة.

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
400	25000	MSSB	32.13657	0.006900	2.02867	0.9425	217.6759
		DEL	33.9765	0.2607	2.3398	0.18887	900.64
		DTR	37.3590	0.1383	3.4957	0.21167	1034.11
900	5625	MSSB	29.3055	0.0059	2.3008	0.92577	276.51581
		DEL	31.8176	0.28930	2.4100	0.16501	811.64
		DTR	36.5298	0.24879	2.6687	0.20387	858.97
1600	10000	MSSB	39.2087	0.00400	2.29500	0.84599	374.0227
		DEL	32.9530	0.1585	3.7521	0.1373	820.10
400	25000	DTR	33.7119	0.2993	3.6798	0.2089	1026.11



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير
المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

جدول رقم (4): معدل القيم التقديرية للمعاملات
($N = 10^3, c = 3, \delta = 0.5, \rho = 0.108, \lambda = 36$) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة
 $n=50$ ومستويات تباين مرتفعة.

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\bar{N}
400	25000	MSSB	32.1244	0.00806	3.0429	0.5739	466.64
		DEL	35.4945	0.1935	3.5189	0.3477	1031.88
		DTR	33.4091	0.09380	2.6057	0.3999	979.75
900	5625	MSSB	30.195	0.021590	3.0469	0.55038	475.33
		DEL	33.4465	0.2013	2.4032	0.1973	926.970
		DTR	36.9234	0.09313	3.4512	0.3531	1049.9
1600	10000	MSSB	32.784	0.0043	3.0127	0.5370	566.76
		DEL	31.4387	0.1957	3.5112	0.1721	890.67
		DTR	36.5809	0.1258	2.4979	0.3669	1082.90

جدول رقم (5): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=100$ ومستويات
تباين منخفضة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\bar{N}
20	100	MSSB	8.03935	13.9214	18.8705	86.1883	79.9830
		DEL	4.93369	5.5837	8.9771	35.5920	7.0150
		DTR	3.02059	2.7540	5.5923	22.4389	4.6807
30	150	MSSB	8.9012	15.0981	20.0926	87.7730	81.2045
		DEL	6.1435	7.3008	8.4209	32.5956	7.4422
		DTR	3.9783	4.2546	7.3433	14.4384	5.5287
40	200	MSSB	10.10165	16.3137	21.66649	89.7619	81.96516
		DEL	6.9925	7.8329	10.5231	33.9242	7.9998
		DTR	4.4342	7.2356	7.3365	19.0342	6.2561



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

جدول رقم (6): معدل الخطا النسبي (ARE) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=200$ ومستويات
تباين منخفضة مع تقريب المعلمة المتغيرة الزمن $\eta(t)$ بـ 5 عقد شريحة للرتبة 3

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
20	100	MSSB	6.7892	11.7092	17.5519	84.3286	76.1149
		DEL	4.1719	3.4590	7.2667	32.2220	5.1178
		DTR	2.220	2.0809	4.9250	18.3341	2.4891
30	150	MSSB	7.4041	12.7832	16.0876	85.9732	79.0149
		DEL	4.4171	3.8654	7.5616	22.6294	6.488
		DTR	3.6336	3.3055	5.5518	13.1809	5.0001
40	200	MSSB	7.74954	14.0987	18.6724	87.1953	80.81149
		DEL	5.6546	4.9654	7.9859	23.8768	6.8763
		DTR	4.3986	3.8010	6.0363	13.5101	5.5911

جدول رقم (7): معدل القيم التقديرية للمعاملات
وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة $n=100$ ومستويات تباين منخفضة.
($\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3$)

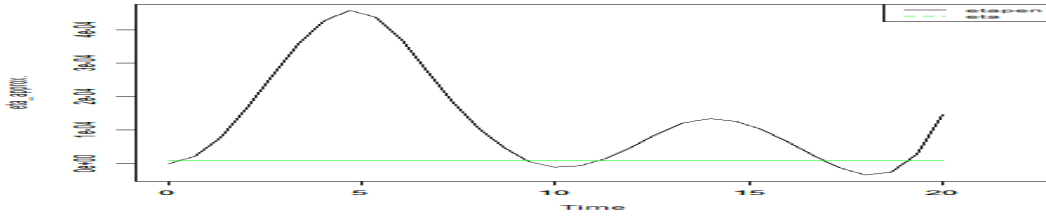
σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
20	100	MSSB	33.2383	0.09358	3.55706	0.0505	1098.78
		DEL	35.4387	0.1105	2.5189	0.3866	1055.86
		DTR	35.7209	0.1070	2.9067	0.4228	889.765
30	150	MSSB	32.9834 35.7465	0.09172	3.5346	0.076058	1127.98
		DEL	32.9834 35.7465	0.1164	3.4234	0.3703	1050.98
		DTR	32.9834 35.7465	0.1046	3.2111	0.4145	910.78
40	200	MSSB	32.3795	0.0887	3.5642	0.08302	1071.90
		DEL	35.0165	0.1397	2.9521	0.3266	1050.393
		DTR	35.6061	0.1158	3.2121	0.3645	922.11



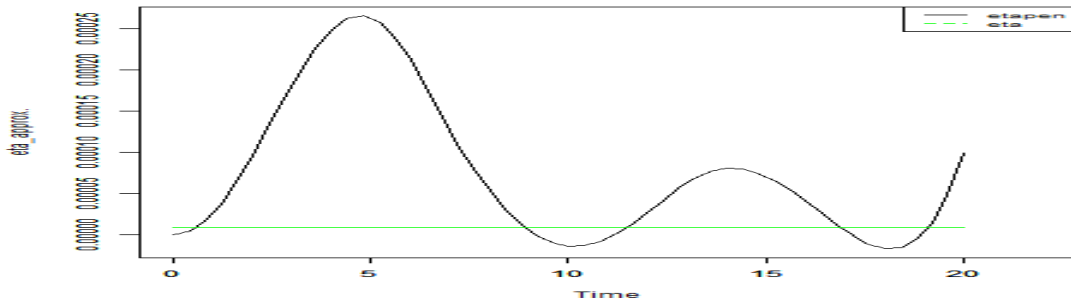
مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية

جدول رقم (8): معدل القيم التقديرية للمعلمات
($\lambda = 36, \rho = 0.108, \delta = 0.5, c = 3, N = 10^3$) وفق طرائق التقدير المختلفة لحجم عينة
 $n=200$ ومستويات تباين مرتفعة.

σ_1^2	σ_2^2	METHOD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	\hat{c}	$\hat{\delta}$	\hat{N}
20	100	MSSB	33.5216	0.09354	3.60010	0.07338	1098.98
		DEL	35.9915	0.1043	3.18453	0.44487	1001.1
		DTR	35.6205	0.1058	2.9522	0.48432	1043.2
30	150	MSSB	33.31941	0.09444	3.6051	0.05468	993.874
		DEL	36.9086	0.11068	3.1016	0.43196	1091.7
		DTR	37.0248	0.10187	3.5639	0.41295	983.97
40	100	MSSB	33.2163	0.09323	3.6720	0.05454	1039.008
		DEL	36.9246	0.1115	3.0560	0.4452	1052.22
		DTR	36.8756	0.1110	3.0521	0.5099	910.21



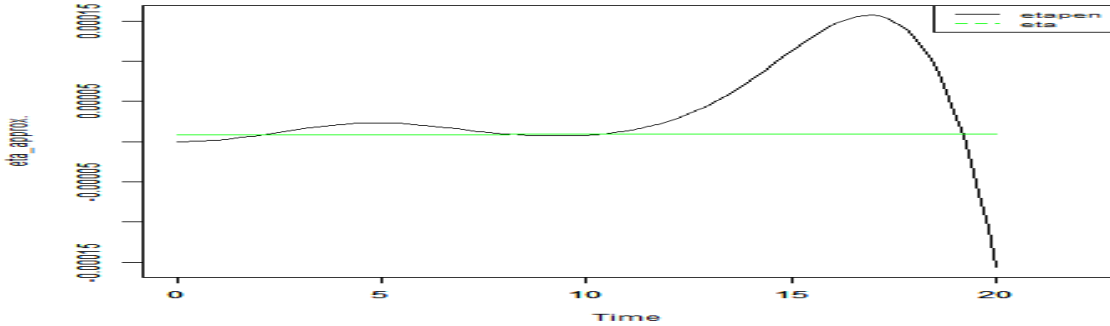
شكل رقم (1): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 30 وتباين $\sigma_2^2 = 2500, \sigma_1^2 = 400$



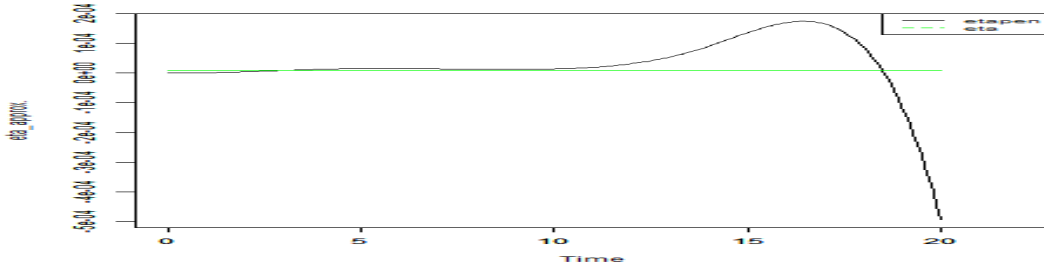
شكل رقم (2): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 50 وتباين $\sigma_2^2 = 2500, \sigma_1^2 = 400$



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية الخطية



شكل رقم (3): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 100 وتباين $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 100$



شكل رقم (4): تقدير المعلمة المتغيرة الزمن لحجم عينة 200 وتباين $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 100$

4- تحليل نتائج المحاكاة

1. من خلال الجدول رقم (1) والجدول رقم (2) ان (ARE) سوف يرتفع وبشكل ملحوظ بزيادة التباين وخاصة للطريقة (MSSB).
2. من الجداول (1)(2) نلاحظ تفوق طريقة (DTR) للتفريق العددي على طريقة (DEL) وذلك لامتلاكها اقل (ARE)
3. من خلال الجداول (3)(4) نلاحظ وبشكل عام ان طرائق التقدير التي تعتمد على التفريق العددي أعطت تقديرات للمعلمات متقاربة وهي قريبة من القيم الحقيقية كما نلاحظ ان تقديرات المعلمات بطريقة (MSSB) كانت بعيدة نوعا ما عن قيمها الحقيقية.
4. بشكل عام لقد تفوقت طرائق التفريق العددي (DTR)(DEL) على الطريقة المتعددة المراحل (MSSB) في التقدير وكانت الأفضلية في التقدير لطريقة (DTR) لامتلاكها اقل (ARE) في العينات الصغيرة $(n=30)$, $(n=50)$.
5. ومن خلال الجداول (5)(6) نلاحظ التحسن في مقدرات المعالم وذلك بسبب كبر حجم العينة كذلك يمكن ملاحظة انه عندما يتم رفع مستوى التباين سوف يرتفع (ARE) بشكل طفيف .
6. ومن خلال الجداول (7)(8) نلاحظ وبشكل عام ان طرائق التقدير الثلاثة أعطت تقديرات للمعلمات متقاربة وهي قريبة من القيم الحقيقية في حالة العينات الكبيرة ومستويات التباين المنخفضة مع بقاء الأفضلية في التقدير لطرائق التفريق العددي.
7. بشكل عام في العينات الكبيرة $(n=100)$, $(n=200)$ تفوقت طرائق التفريق العددي (DTR)(DEL) على الطريقة المتعددة المراحل (MSSB) في التقدير وكانت الأفضلية في التقدير لطريقة (DTR) لامتلاكها اقل (ARE).
8. من خلال الجداول (5)(6) نلاحظ ان طريقة (MSSB) لم تعطي تقديرات جيدة للمعلمات حتى عند حجوم العينات الكبيرة بالرغم من كفاءتها الحسابية ويعود السبب في ذلك لاستعمالها مقدرات المشتقات .



مقارنة بين الطريقة المتعددة المراحل وطرائق التفريق العددي لتقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية

9. من ملاحظة الاشكال (1)(2)(3)(4) لتقدير المعلمة المتغيرة الزمن نلاحظ ان تذبذب المعلمة يقل كلما كبر حجم العينة وهذا يدل ان التذبذب في العدوى يقل بزيادة حجم العينة

5- الاستنتاجات :

1. اثبتت طرائق التفريق العددي كفاءتها في التقدير حيث انها تمتاز بدقة المقدرات للمعالم مقارنة مع الطريقة المتعددة المراحل ولا تمتلك كلفة حسابية عالية حيث انها لا تحتاج الحل العددي المتكرر ولا تحتاج الى القيم الابتدائية يمكننا القول انها طريقة توازن بين دقة التقدير والكلفة الحسابية .
2. عند استخدام صيغة طريقة شبه المنحرف Trapezoidal role في طرائق التفريق العددي للتقدير طريقة (DTR) أعطت هذه الطريقة مقدرات افضل من استخدام طريقة اويلر Euler طريقة (DER) والسبب في ذلك ان رتبة الخطأ العددي لطريقة (DTR)(P=2) اعلى من رتبة الخطأ العددي لطريقة (DTR)(P=1). نستنتج من ذلك ان الرتب العليا لخوارزميات التفريق تنتج دقة افضل في التقديرات لكن تكون كلفتها الحسابية اعلى
3. اثبتت الدراسة ان طريقة شبه المنحرف (DTR) تمتلك التوازن الأفضل بين الكلفة الحسابية والدقة في التقدير
4. عند زيادة مستويات التباين في العينات نلاحظ زيادة (ARE) وخاصة في العينات الصغيرة اما في العينات الكبيرة فعند زيادة مستوى التباين نلاحظ ان قيم (ARE) تزداد بشكل اقل مما هو عليه في العينات الكبيرة .
5. نلاحظ انه عند زيادة حجم العينة (n=200) سوف تقترب المقدرات في طرائق التفريق العددي (طريقة DEL وطريقة DTL) من بعضها بعضا مما يدل على كفاءة الطريقتين في العينات الكبيرة .
6. كما نلاحظ ان الطريقة المتعددة المراحل (MSSB) تكون كفوة حسابيا ولا تحتاج الحل العددي المتكرر للمعادلات التفاضلية كذلك لا تحتاج القيم الابتدائية لمتغيرات الحالة الا انها لم تعطي مقدرات جيدة للمعاملات حتى عند اخذ حجوم عينات كبيرة وهذا بسبب ان هذه الطريقة تتطلب حساب مقدرات المشتقات لمتغيرات الحالة وغالبا ما تكون هذه المقدرات ليست دقيقة وخاصة في البيانات المتفرقة .
7. تزداد دقة خوارزمية التفريق العددي في تقدير معاملات نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية كلما زادت رتبة الخطأ العددي مقارنة مع رتبة خطأ القياس .
8. نلاحظ ان التذبذب في المعلمة المتغيرة الزمن يقل بزيادة حجم العينة

6- التوصيات

1. يوصى باستعمال هذه طرائق التفريق العددي في تقدير المعاملات في نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية كونها غير مكلفة حسابيا ولا تحتاج الى قيم ابتدائية ولا تحتاج الى الحل العددي للمعادلات التفاضلية.
2. يوصى بتطبيق هذه الطريقة على النماذج المختلفة من المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية والتي لا تمتلك صيغ حلول تحليلية كما يمكن استعمال هذه الطرائق على النماذج التي تمتلك اكثر من معلمة واحده متغيرة مع الزمن .
3. في طرائق التفريق العددي تم استعمال طريقة الشرائح الجزائية لتقدير متغيرات الحالة نوصي باستعمال طرائق أخرى لتقدير متغيرات الحالة مثل انحدار الشرائح Regression splines وتمهيد الشرائح Smoothing Spline وطريقة LOESS في المرحلة الأولى من هذه الطريقة ومن ثم ملاحظة تأثير طرائق التمهيد هذه على مقدرات المعاملات. كذلك الحال بالنسبة للطريقة المتعددة المراحل حيث يمكن استعمال طرائق التمهيد المختلفة لتقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها في المرحلة الأولى وأيضا تتم مقارنة هذه الطرائق لملاحظة تأثيرها في مقدرات المعاملات .

المصادر

- I. Audoly ,S. and Bellu,G.(2011),” Global Identifiability of Nonlinear Models of Biological Systems”. IEEE transection on biomedical engineering , vol.48,no1 .
- II. Byrd ,H., Lu ,P., Nocedal ,J.& Zhu ,C. (1995). limited memory algorithm for bound constrained optimization. SIAM J Sci Comput;16(5):1190208.



- III. Claeskens G, Krivobokova T, Opsomer J. (2009). "Asymptotic properties of penalized spline estimators. *Biometrika*"; printed in *Great* 96,3,pp:529–544.
- IV. De Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer, New York. MR0507062.
- V. Fei, Y., Rong,G.,Wang,B.& Wang,W.(2014). Parallel L-BFGS-B Balgorithm on GPU. *Computers & Graphics*. journal homepage: www.elsevier.com/locate/cag.
- VI. Hardin, J. W, Schmiediche,H.& Carroll, R. J.(2003). The regression-calibration method for fitting generalized linear models with additive measurement error. *The Stata Journal* pp. 361–372.
- VII. 27. Hu,T.&Qiu,Y.&Cui,H.&Chen,L.(2015). Numerical Discretization –Based Kernel Type Estimation Methods For Ordinary Differential Equation Models. *Acta Mathematica Sinica, English Series* 8, pp. 1233–1254. [Http://www.ActaMath.com](http://www.ActaMath.com).
- VIII. Kendall ,E. & Han, W.& David, E.(2009). *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* . John Wiley & Sons, Inc. ISBN 978-0470-04294-6
- IX. Liang, H., Miao, H., and Wu, H. (2010). Estimation of Constant and Time-Varying Dynamic Parameters of HIV Infection in a Nonlinear Differential Equation Model., *Annals of Applied Statistics*, 4, 460–483.
- X. Liang, H., and Wu, H. (2008). Parameter Estimation for Differential Equation Models Using a Framework of Measurement Error in Regression Models. *Journal of the American Statistical Association*, 103:484, 1570-158.3
- XI. Mattheij, R., and Molenaar, J. (2002). *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*. Philadelphia: SIAM.
- XII. Miao, H., Dykes, C, Demeter, L. M. and Wu, H. (2009). Differential equation modeling of HIV viral fitness experiments Model identification, model selection, and multi-model inference. *Biometrics* 65 292-300.
- XIII. Meshkat,N., Anderson ,C. &DiStefano,C.(2011). Finding identifiable parameter combinations in nonlinear ODE models and the rational reparameterization of their input–output equations. *Mathematical Biosciences* 233. journal homepage: www.elsevier.com/locate/mbs .
- XIV. Sarah, E.,(2016). A Consistent Direct Method for Estimating Parameters in Ordinary Differential Equations Models. Division of Public Health Sciences Fred Hutchinson Cancer Research Center 1100 Fairview Ave North, M2-B500 Seattle, WA 98109, USA email: sholte@fhcrc.org.
- XV. Wu, H., Miao, H., Xue, H., Tppham, D., and Zand, M. (2014). Quantifying Immune Response to Influenza Virus Infection via Multivariate Nonlinear ODE Models with Partially Observed State Variables and Time-Varying Parameters. doi:10.1007/s12561-014-9108-2.
- XVI. Xue, H., Miao, H., and Wu, H. (2010). Sieve Estimation of Constant and Time-Varying Coefficients in Nonlinear Ordinary Differential Equation Models by Considering Both Numerical Error and Measurement Error. *The Annals of Statistics*, 38(4), 2351–2387.
- XVII. Xue, H., and Kumar, A. (2012). Numerical Discretization-Based Estimation Methods for Ordinary Differential Equation Models Via Penalized Spline Smoothing with Applications in Biomedical Research, *Biometrics*, 68(2), 344–352.



Comparison of Multistage and Numerical Discretization Methods for Estimating Parameters in Nonlinear Linear Ordinary Differential Equations Models.

ABSTRACT

Many of the dynamic processes in different sciences are described by models of differential equations. These models explain the change in the behavior of the studied process over time by linking the behavior of the process under study with its derivatives. These models often contain constant and time-varying parameters that vary according to the nature of the process under study in this We will estimate the constant and time-varying parameters in a sequential method in several stages. In the first stage, the state variables and their derivatives are estimated in the method of penalized splines(p- splines) . In the second stage we use pseudo lest square to estimate constant parameters, For the third stage, the remaining constant parameters and time-varying parameters are estimated by using a semi-parametric regression model and then comparing this method with methods based on numerical discretization methods, which includes two stages. In the first stage we estimate the state variables and their derivatives by (p spline) , In the second stage we use Methods of numerical discretization methods (the Euler discretization method and the trapezoidal discretization method), where the comparison was done using simulations and showed the results superior to the trapezoidal method of numerical differentiation where it gave the best estimations to balance between accuracy in estimation And high arithmetic cost.

Keywords: Nonlinear Ordinary Differential Equations, penalized splines, Euler for Numerical Distraction, Trapezoidal Numerical Distraction, Nonparametric Regression, Semi-Parametric Regression.