المقارنة بين تقديرات معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستخدام أسلوب OLS وأسلوب برمجة الأهداف الخطية

م.

صفاء كريم كاظم*

المستخلص:

تناول هذا البحث طريقتين لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد, واحدة من هذه الطرق هي طريقة المربعات الصغرى OLS , حيث تمتاز هذه الطريقة بصفة (Blue) وطريقة أخرى هي أسلوب برمجة الأهداف الخطية Goal programming , حيث تعتبر هذا الأسلوب واحدة من الأساليب المهمة في بحوث العمليات Operation Research في اتخاذ القرار, تم توظيف هذا الأسلوب اعتمادا على فكرة حد الخطأ العشوائي εi في نموذج الانحدار الخطي المتعدد الذي يمثل الانحراف بين القيمة التقديرية والقيمة الحقيقة للنموذج ومتغيرات الانحراف السالب والموجب في أسلوب برمجة الأهداف.

حيث تم صياغة معادلات نموذج الانحدار الخطي المتعدد كقيود لأسلوب برمجة الأهداف الخطية وافتراض أن المعلمات β التي نحاول تقديرها بطرق التقدير كمتغيرات قرار, وحد الخطأ العشوائي يمثل الانحراف السالب والموجب , أما المتغير المعتمد y فيمثل الحد المطلق b .

بعد الحصول على التقديرات بالأسلوبين تبين أن الأسلوبين ملائمتين في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد, وذلك من خلال المقارنة بين الطريقتين باستخدام اختبار Wilcoxon test.

Abstract:

---

* مدرس/ جامعة المثنى/ كلية العلوم/ قسم الرياضيات وتطبيقات الحاسوب

مقبول للنشر بتاريخ 2009/7/5

This paper involve two methods to estimated parameters of linear multiple regression model, one of that methods is least square OLS, which have (Blue) property and other method it Goal programming method, which it method one of important techniques in Operation Research in decision make. we can appointment this technique dependent on idea of random error εi in linear multiple regression model which it present deviation between estimation value and real value for model and positive and negative deviation variables in linear Goal programming technique.

We formulated the equations of linear multiple regression model as restrictions to linear Goal programming technique and assumption of the parameters β it decision variables ,and the random error present negative and positive deviation variable ,and the dependent variable Y present absolute bound linear Goal programming technique.

After obtain on estimations using the two techniques, we observe that two techniques are fitting in estimated the perimeters of the linear multiple regression model, by make comparison between two techniques using Wilcoxon test.

المقدمة:

يهتم تحليل الانحدار الخطي المتعدد بدراسة وتحليل أثر عدة متغيرات مستقلة كمية على متغير تابع كمي, حيث يستخدم نموذج الانحدار الخطي المتعدد كوسيلة للتنبؤ للقيم المستقبلية عن طريق تقدير معلمات النموذج التي تعتمد في النموذج التقديري لإغراض التنبؤ.

ونتيجة للتطور الحاصل في أساليب تقدير المعلمات منها طريقة المربعات الصغرى OLS وطريقة الإمكان الأعظم ML وغبرها من طرق التقدير أعطى ذلك للباحثين البحث عن طرق أخرى مثل استخدام البرمجة الخطية كنموذج لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد[4].

كذلك تطرقت بعض البحوث إلى استخدام أسلوب برمجة متعددة الأهداف لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط والمتعدد لكن اقتصرت الأخير على متغيرين فقط (ثلاث معلمات)

في هذا البحث تم اعتماد مثال تطبيقي للدراسة يتضمن أهم المؤثرات التي تؤثر على أعداد الموارد البشرية العاملة في دائرة توزيع كهرباء بغداد , حيث تم استخدام نموذج الانحدار المتعدد كوسيلة للتنبؤ بأعداد العاملين في الدائرة وقد تم تقدير معلمات النموذج التي اعتمدت في النموذج التنبؤي لأعداد العاملين باستخدام طريقة المربعات الصغرى OLS .

كذلك تم استخدام احد أساليب بحوث العمليات Operation Research وهو أسلوب برمجة الأهداف الخطية Goal programming technique لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

تم المقارنة بين النموذجين باستخدام احد الاختبارات اللامعلمية المهمة وهو اختبار Wilcoxon .

نموذج الانحدار الخطي المتعدد:-

يستخدم نموذج الانحدار الخطي المتعدد لوصف العلاقة بين المتغير التابع y المؤلف من (n) من المشاهدات والمتغيرات المستقلة $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k)$, ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بالمعادلة الآتية[3]:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots\ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$i = 1,2,\ldots\ldots, n$$

حيث أن $(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots, \beta_K)$ تعبر عن معاملات الانحدار, ε_i يعبر عن الخطأ العشوائي للمشاهدة رقم i, $i=1, 2,\ldots, n$. وحيث أن عدد المشاهدات هي n, يكون لدينا n من المعادلات يمكن صياغتها في صورة مصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots\ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots\ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots\ldots & x_{nk} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots\ldots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Y=XB+U

حيث أن:

Y: يعبر عن متجه المشاهدات التابعة, وهومن درجة $(n\times1)$, والعنصر رقم i في هذا المتجه هو yi.

X : تمثل مصفوفة المشاهدات المستقلة (التوضيحية) , وهي من الدرجة $(n\times(k+1))$, والصف رقم i في هذه المصفوفة هو : $(1 \; X_{i1} \; X_{i2} \ldots X_{ik})$.

B: يعبر عن متجه معاملات الانحدار, وهو من الدرجة $((k+1)\times 1)$.

U: يعبر عن متجه الأخطاء العشوائية, وهو من الدرجة $(n\times1)$, والعنصر رقم i هو الخطأ العشوائي ε_i.

يستند نموذج الانحدار المتعدد والمبين في المعادلة (2) على عدة افتراضات هي :

1- مصفوفة المتغيرات المستقلة X محددة, ومعطاة Fixed , فهي مقاسه بدون أخطاء.

2- عدم وجود علاقة خطية تامة أو شبه تامة بين المتغيرات المستقلة, أي أن:

$$(\mathrm{Rank}(X) = k+1)<n \;.......\; (3)$$

3- يوجد استقلال إحصائي بين المشاهدات المستقلة $(X_{i1} \; X_{i2} \; .... \; X_{ik})$, والخطأ العشوائي ε_i , أي أن أعمدة المصفوفة X مستقلة خطيا" عن متجه الأخطاء العشوائية U , ويعبر عن ذلك رياضيا" كما يلي :

$$\mathrm{Cov}(X, U) = E \quad (X'U) - [E(X)]' \, [E\,(U)] = 0 \;........\; (4)$$

4- الخطأ العشوائي ε_i , $i=1,2,....,n$ له توزيع طبيعي متوسطه صفرا", وتباينه σ^2 ثابت من مشاهدة إلى أخرى, أي أن $(\varepsilon_i \sim N \;(0, \sigma^2)$, كما يفترض أن الأخطاء $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_n)$ مستقلة احصائيا", ويعبر عن ذلك رياضيا" كما يلي :

$$E(\varepsilon i) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E\,(\varepsilon_i\,\varepsilon_j) = \{\, \sigma^2 \text{ if } i = j \quad \text{and} \quad 0 \text{ if } i \neq j \}........(5)$$

أي أن متجه الأخطاء U يتبع توزيع طبيعي متعدد متوسطه صفرا" وله مصفوفة تباين Σ, أي أن:

$$U \sim N_n\,(0,\Sigma)$$

حيث أن المصفوفة Σ مصفوفة متماثلة ومن الدرجة$(n\times n)$, ويعبر عنها كما يلي :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & \sigma^2 & ..... & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & ..... & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 1 & ..... & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix} ....(6)$$

نموذج برمجة الأهداف الخطية [5]:-

أن معظم تطبيقات البرمجة الرياضية Mathematical programming كانت تعتمد على حل مشاكل الهدف المفرد وان العديد من مشاكل الحياة الواقعية تتضمن تحليل أكثر من هدف واحد. أن الأسلوب المستخدم من هذا النوع من الحالات هو تبسيط المشكلة المختارة واختيار هدف ذات أهمية أساسية ومن ثم حل نتائج النموذج ذات الهدف المفرد. أما الأهداف الأخرى ذات الأهمية الثانوية فأنها تصاغ كقيود للمشكلة قيد الدراسة.أن هذا الأسلوب بالمقابل سيقود إلى حلول غير واقعية وبشكل خاص عندما تكون الأهداف متنازعة أو مختلفة من ناحية وحدة القياس على سبيل المثال.

أن معالجة هذه المشكلة باستخدام الهدف المفرد سيؤدي إلى حل ضعيف وعليه فان أفضل أسلوب لهذه المشاكل سيكون أسلوب برمجة متعددة الأهداف Goal Programming Linear.إن هذا الأسلوب يتضمن خلال الحل بان بعض الأهداف تكون غير منجزة بالكامل ويكون ذلك على حساب انجاز الأهداف الأخرى.

أن الفكرة الأساسية في أسلوب برمجة الأهداف الخطية هي تحديد أولوية P_K لكل هدف , ثم تحديد وزن محدد لكل هدف ضمن مستوى الأولوية الواجد , ثم البحث عن حل يصغر المجموع الموزون لانحرافات دوال الهدف d_i^-,d_i^+ عن أهدافها الخاصة , أي أن متغيرات الانحراف الموجبة والسالبة للقيود توضع بدل وظيفة الهدف وهي ما يراد تخفيضها .

يمكن التعبير رياضيا" عن نموذج برمجة الأهداف الخطية كما يلي :

$$Min \; : a = \{P_1(d_i^+, d_i^-), P_2(d_i^+, d_i^-)......., \; P_k(d_i^+, d_i^-)\}......... \quad ..(1)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_i + d_i^+ - d_i^- \quad for \quad i = 1,2,..., \; n$$

$$x_j, d_i^+, d_i^- \geq 0$$

حيث أن:

a: تمثل دالة الانجاز

P_K : الأولوية رقم (k) في دالة الهدف.

x_j : متغير القرار.

a_{ij}: معامل متغير القرار رقم j في الهدف رقم i.

d_i^+: متغير الانحراف الموجب ويمثل أعلى انجاز للهدف.

d_i^- : متغير الانحراف السالب ويمثل أدنى انجاز للهدف.

b_i: قيمة الهدف رقم i.

تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد

تعتبر طريقة المربعات الصغرى OLS واحدة من الطرق المهمة في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد لما تتصف به هذه الطريقة من مواصفات تميزها عن الطرق التقدير الاخرى المعروفة, حيث تمتاز بعدم تحيزها وأنها تمتلك اقل تباين ممكن , حيث تتصف بخاصية الـ Blue (Best Linear Unbiased Estimate).

تستخدم طريقة المربعات الصغرى OLS لتقدير معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد $(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_K)$ للمعادلة رقم (2) والمعادلة كتابتها كما يلي[3]:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots\ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots\ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots\ldots & x_{nk} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$Y=XB+U$$

التي تجعل مجموع مربعات الخطأ أو المتبقي اقل مايمكن أي أن :

$$U = Y - XB \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

وتربيع الطرفين نحصل على:

$$Q=U'U=(Y-XB)'(Y-XB)\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

وعيه يمكن الحصول على:

$$Q=U'U=Y'Y-2B'X'Y+B'X'XB\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ولإيجاد قيمة B التي تجعل U'U اقل مايمكن يتم اخذ المشتقة بالنسبة B_j ومساواتها للصفر . أي أن:

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial B_0} \\ \frac{\partial Q}{\partial B_1} \\ ..... \\ \frac{\partial Q}{\partial B_K} \end{bmatrix} = \quad -2X'Y + 2X'X\hat{B} \quad ....(12)$$

المعادلة (12) يمكن أن تبسط كما يلي:

$$X'X\hat{B} = X'Y$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y \quad ....(13)$$

حيث أن $\hat{B}$ تمثل متجه المقدرات بطريقة OLS .

أو يمكن كتابة ناتج المعادلة (12) أكثر تفصيلا كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial B_0} &= (-2)\sum_{i=1}^{n}[yi - (\hat{B}_0 + \hat{B}_1 x_{1i} + \hat{B}_2 x_{2i} + ... + \hat{B}_k x_{ki}) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial B_1} &= (-2)\sum_{i=1}^{n} x_{1i}[yi - (\hat{B}_0 + \hat{B}_1 x_{1i} + \hat{B}_2 x_{2i} + ... + \hat{B}_k x_{ki}) = 0 \\ &..... \\ \frac{\partial Q}{\partial B_K} &= (-2)\sum_{i=1}^{n} x_{ki}[yi - (\hat{B}_0 + \hat{B}_1 x_{ki} + \hat{B}_2 x_{ki} + ... + \hat{B}_k x_{ki}) = 0 \end{aligned}\right\} ....(14)$$

بحل المعادلات أعلاه نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} yi = \hat{B}_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + \hat{B}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + \hat{B}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + ...+ \hat{B}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} yi = \hat{B}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + \hat{B}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + \hat{B}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + ...+ \hat{B}_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i} yi = \hat{B}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \hat{B}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + \hat{B}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + ...+ \hat{B}_k \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{ki} \qquad ....(15)$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} yi = \hat{B}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + \hat{B}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} + \hat{B}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{ki} + ...+ \hat{B}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2$$

من المعادلة (15) أعلاه يمكن توظيف أسلوب برمجة الأهداف الخطية في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد $(\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2, ..., \hat{B}_k)$ وذلك بافتراض أن :

$$\hat{B}_{i-1} = x_i \quad \text{و} \quad yi = b \quad \text{و} \quad \varepsilon_i = d_i^- + d_i^+$$

حيث أن:

ε_i **: حد الخطأ في نموذج الانحدار الخطي المتعدد .**

$d_i^- + d_i^+$ **: متغيرات الانحراف السالب والموجب في نموذج برمجة الأهداف الخطية.**

yi **: المتغير المعتمد في نموذج الانحدار الخطي المتعدد .**

b **: الحد المطلق في نموذج برمجة الأهداف الخطية.**

$\hat{B}_{i-1}$ **: المقدرات في نموذج الانحدار الخطي المتعدد .**

x_i **: متخيرات القرار في نموذج برمجة الأهداف الخطية.**

مثال تطبيقي:

تم استخدام البيانات التي اعتمدها الباحث [1] لدراسة التنبؤ بأعداد العاملين من الكادر الهندسي في دائرة توزيع كهرباء بغداد , حيث أن أعداد العاملين في دائرة الكهرباء بشكل عام تتأثر بعدة عوامل مباشرة أو غير مباشرة من وجهة نظر الباحث منها :

x_1 **: الطاقة الكهربائية المستلمة.**

x_2 **: الطاقة الكهربائية المباعة.**

x_3 **: أعداد مستهلكي الطاقة الكهربائية.**

x_4 : عدد محطات 33 / 11 كيلو فولت.

x_5 : عدد مغذيات 33 كيلو فولت.

x_6 : عدد مغذيات 11 كيلو فولت.

x_7 : الحمولة.

أن بيانان أعداد العاملين من الكادر الهندسي موضحة في الجدول أدناه:

جدول رقم (1) يبين أعداد العاملين من الكادر الهندسي لدائرة توزيع كهرباء بغداد للفترة (1985-1994)

الحمولة (ميكاواطاساعة) X_7	عدد مغذيات 11 كيلو فولت X_6	عدد مغذيات 33 كيلو فولت X_5	عدد محطات 33 / 11 كيلو فولت X_4	عدد المستهلكين بالآلاف X_3	الطاقة المباعة X_2	الطاقة المستلمة x_1	عدد الكادر الهندسي Y	السنوات
1060	869	167	86	542	4.627	5.122	101	1985
1190	925	179	90	580.6	4.349	5.659	116	1986
1252	939	184	92	609.65	5.255	6.330	114	1987
1285	959	191	95	638.7	5.595	6.545	119	1988
1277	998	202	96	668.3	6.216	7.312	133	1989
1354	1008	206	97	678.64	7.001	8.046	134	1990
1435	1046	208	98	706.5	6.934	7.911	142	1991
1312	1050	208	99	720.5	4.490	5.114	143	1992
1453	1077	211	100	741.2	7.245	8.050	145	1993
1534	1088	211	101	759.2	7.253	8.768	128	1994

أن النموذج المقترح للتنبؤ بأعداد العاملين للكادر الهندسي كما مبين أدناه:

$$y_i=B_0+B_1x_{i1}+ B_2x_{i2}+ B_3x_{i3}+ B_4x_{i4}+ B_5x_{i5}+ B_6x_{i6}+ B_7x_{i7}+\varepsilon_i \text{ ………. } (16)$$

من خلال بيانات الجدول رقم (1) واعتماد النموذج للمعادلة (16) يمكن الحصول على مقدرات النموذج بطريقة OLS وكما مبينة في الجدول رقم (2).

جدول رقم (2) يبين تقديرات النموذج بطريقة OLS

Estimation	B0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7

Value	-479.763	-13.0931	13.9993	-0.924757	4.05582	0.668762	0.769236	-0.0419362

أن معادلة التنبؤ بطريقة المربعات الصغرى OLS هي كما مبينة أدناه [1]:

$$\hat{y}_i=-479.763-13.0931\,x_{i1}+13.9993\,x_{i2}-0.924757\,x_{i3}+4.05582\,x_{i4}+0.668762\,x_{i5}+0.769236x_{i6}-0.0419362\,x_{i7} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

أن النموذج أعلاه تم الاعتماد عليه لإغراض المقارنة فقط بين معالم النموذج المقدرة بطريقة OLS وأسلوب برمجة الأهداف الخطية , حيث توصل الباحث[1] إلى أن العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد Y هي علاقة خطية , كما استخدم الباحث بعض الاختبارات للكشف عن حالات مشاكل التعدد الخطي و مشكلة عدم التجانس وغيرها من المشاكل التي تواجه إنشاء النموذج .

يمكن تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستخدام أسلوب برمجة الأهداف الخطية وبالاعتماد على المعادلة (15) وبيانات الجدول رقم (1), يمكن صياغة نموذج برمجة الأهداف الخطية كما يلي:

$$\min \quad a = P1\sum_{i=1}^{10}(d_i^- + d_i^+)$$

Subject to:

$$x_1 + 5.122x_2 + 4.627x_3 + 542x_4 + 86x_5 + 167x_6 + 869x_7 + 1061x_8 + d_1^- - d_1^+ = 101$$

$$x_1 + 5.659x_2 + 4.349x_3 + 580.6x_4 + 90x_5 + 179x_6 + 925x_7 + 1190x_8 + d_2^- - d_2^+ = 116$$

$$x_1 + 6.330x_2 + 5.255x_3 + 609.65x_4 + 92x_5 + 184x_6 + 939x_7 + 1252x_8 + d_3^- - d_3^+ = 114$$

$$x_1 + 6.545x_2 + 5.5957x_3 + 638.7x_4 + 95x_5 + 191x_6 + 959x_7 + 1285x_8 + d_4^- - d_4^+ = 119$$

$$x_1 + 7.312x_2 + 6.216x_3 + 668.3x_4 + 96x_5 + 202x_6 + 998x_7 + 1277x_8 + d_5^- - d_5^+ = 133$$

$$x_1 + 8.046x_2 + 7.001x_3 + 678.64x_4 + 97x_5 + 206x_6 + 1008x_7 + 1354x_8 + d_6^- - d_6^+ = 134$$

$$x_1 + 7.911x_2 + 6.934x_3 + 706.5x_4 + 98x_5 + 208x_6 + 1046x_7 + 1435x_8 + d_7^- - d_7^+ = 142$$

$$x_1 + 5.114x_2 + 4.490x_3 + 720.5x_4 + 99x_5 + 208x_6 + 1050x_7 + 1312x_8 + d_8^- - d_8^+ = 143$$

$$x_1 + 8.050x_2 + 7.245x_3 + 741.2x_4 + 100x_5 + 211x_6 + 1077x_7 + 1453x_8 + d_9^- - d_9^+ = 145$$

$$x_1 + 8.768x_2 + 7.253x_3 + 759.2x_4 + 101x_5 + 211x_6 + 1088x_7 + 1534x_8 + d_{10}^- - d_{10}^+ = 128$$

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \phi\ 0 \quad where \quad i = 1,2,......,10$$

$$j = 1,2,....,8$$

بحل النموذج أعلاه بطريقة السمبلكس simplex method نحصل على النتائج التالية[5] :-

جدول رقم (3) يبين تقديرات النموذج بطريقة Linear Goal Programming

Variables	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
Value	-6.25	1.09	-6.28	-6.84	1.12	3.12	1.77	-20.03

أن معادلة التنبؤ لنموذج الانحدار الخطي المتعدد بطريقة Linear Goal Programming هي كما في أدناه:

$$\hat{y}_i = -6.25 + 1.09\ x_{i1} - 6.28x_{i2} - 6.84x_{i3} + 1.12x_{i4} + 3.12\ x_{i5} + 1.77\ x_{i6} - 20.03x_{i7} \quad .... (18)$$

مقارنة نتائج الطريقتين

أن تقديرات نموذج الانحدار الخطي المتعدد التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة OLS وطريقة Goal programming والمبينة في الجدولين (1) و(2) على التوالي يمكن مقارنتهما

باستخدام احد الاختبارات اللامعلمية ومنها اختبار مجموع الرتب لـ ويلكوكسن **Wilcoxon rank sum test.**

أن اختبار **Wilcoxon** واحد من الاختبارات اللامعلمية المهمة في تقيم العينات المرتبطة والمستقلة .

على افتراض أن لدينا عينتين مستقلتين بحجم n_1,n_2 على التوالي . باستخدام هذا الاختبار فانه يتطلب ترتيب بيانات العينتين معا من الأصغر إلى الأكبر حسب الرتبة , فالرتبة (1) تعطى لأصغر قيمة والرتبة (2) تعطى للأكبر من الصغرى, فان إحصاءه اختبار ويلكوكسن تحسب كالأتي[6] :

$$w = \sum_{i=1}^{m} Ri \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

حيث أن:

R_i: تمثل رتبة المتغيرx_i

x_i : تمثل الفرق رقم i بين زوج من المشاهدات.

أذا كان حجم العينتين $n_1,n_2 \geq 8$, فان مجموع الرتب يتوزع توزيع طبيعي تقريبي بمتوسط وانحراف معياري كالأتي :

$$\overline{R}_1 = E(w) = \frac{[n_1(n_1+n_2+1)]}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

$$Var(w) = \frac{[n_1 n_2 (n_1+n_2+1)]}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

حيث أن n_1,n_2 حجم العينتين على التوالي.

عندما تكون n_1,n_2 متساويتين أو اكبر من 8 أو 10 فان إجراءات العينة الكبيرة تستخدم التقريب الطبيعي(ألاعتدالي) وتصحيح الاستمرارية وهذا سيعطي تقديرا للاحتمالات المطلوبة والتي لاتختلف كثيرا عن تلك المستحصلة من التوزيعات الحقيقية .

فيكون الانحراف الطبيعي z مع تصحيح الاستمرارية معطى بالعلاقة التالية:

$$z = \frac{\left|R_1 - \overline{R}_1\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \ldots\ldots\ldots (22)$$

حيث أن R_1 تمثل اصغر مجموع رتب للعينتين قيد الدراسة.

فإذا كانت هذه القيمة مساوية أو اكبر من 1.96 أو 2.58 فإننا نرفض فرضية العدم عند مستوى معنوية 0.05 و 0.01 على التوالي ونقبل الفرضية البديلة أن العينات سحبت من مجتمعات مختلفة[5].

أن اختبار الفرضيات المستخدمة لهذا الاختبار هي أن الفرق بين متوسط العينتين يكون مساويا" للصفر , أي ان :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

للمقارنة تقديرات الأسلوبين موضوع الدراسة نقوم بالاتي:

1- نحسب الرتب للعينتين (التقديرات) من الجدول (1) و(2) وكما موضحة في الجدول أدناه:

جدول رقم (4) يبين رتب التقديرات لطريقة OLS و Linear Goal Programming

العينة الأولى A (تقديرات OLS)	-479.763	-13.0931	13.9993	-0.924757	4.05582	0.668762	0.769236	-0.0419362
الرتبة	1	3	16	7	15	9	10	8
العينة الثانية B (تقديرات Goal)	-6.25	1.09	-6.28	-6.84	1.12	3.12	1.77	-20.03
الرتبة	6	11	5	4	12	14	13	2

2- نحسب مجموع الرتب وكالاتي:

W_{OLS} مجموع رتب = 69

W_{Goal} مجموع رتب = 67

3- نحسب الأتي :

$$E(W_{Goal}) = 68$$
$$Var(W_{Goal}) = 544$$
$$|z| = 0.052$$

4- عند مستوى معنوية 0.05 نلاحظ ان1.96 $\leq |z|$ لذا نقبل فرضية العدم .

الاستنتاجات و التوصيات:

1- من خلال النتائج التي تم الحصول عليها من الأسلوبين المستخدمين في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد نستنتج أن النموذجان ملائمان في تقديرات معلمات نموذج الانحدار الخطي

المتعدد._حيث تم قبول فرضية العدم والتي تنص على عدم وجود فرق ذو دلالة معنوية بين تقديرات المعلمات للنموذج استخدام الأسلوبين.

2- هناك العديد من المعايير التي من خلالها نستطيع تقييم ومقارنة طرق تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد منها معامل التصحيح R^2, متوسط مربعات الخطأ MSE , كذلك يمكن استخدام t كأسلوب معلمي للمقارنة بين تقديرات المعلمات لنموذج الانحدار الخطي المتعدد التي تم التوصل أليها باستخدام الأسلوبين المستخدمين في هذه الدراسة ....الخ.لذلك نوصي باستخدامها , حيث أن البحث تناول أسلوب لامعلمي للمقارنة وهو اختبار Wilcoxon rank sum test.

المصادر

1- الدجيلي , لمياء نبيل ,1997 "بناء نموذج لتخطيط القوى العاملة في المنشاة العامة لتوزيع كهرباء بغداد" ,أطروحة دكتوراه – إحصاء , الجامعة المستنصرية .

2- الراوي,خاشع محمود,1987 –"المدخل إلى تحليل الانحدار",جامعة الموصل ,وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

3- العكيلي , هناء محسن , 1991 " التحليل الإحصائي في التربية وعلم النفس",الجامعة المستنصرية ,دار الحكمة للطباعة والنشر.

4-Fikri G. 2005," A Comparison of three linear programming models for computing least absolute values estimations" , J. OF Math . & Stat. v (34), 95-102.

5- Ignizio J.P." Goal Programming and Extensions", Heath (Lexington Books), Lexington, MA, 1976.

6- Lehmann E.L. 1988 ,"Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks", San Francisco"HolenDay.

....

....

....