مقدر بيز لدالة المعولية لأنموذج باريتو للفشل من النوع الأول

أ. صباح هادي
الباحث ستار محمد صالح
جامعة بغداد - كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

1. المستخلص ABSTRACT

In this paper an estimator of reliability function for the pareto dist. Of the first kind has been derived and then a simulation approach by Monte-Calro method was made to compare the Bayers estimator of reliability function and the maximum likelihood estimator for this function. It has been found that the Bayes. estimator was better than maximum likelihood estimator for all sample sizes using Integral mean square error(IMSE).

2. المقدمة Introduction

يرجع توزيع باريتو الى عالم الاقتصاد (Vilfredo Pareto) حيث وضع اساس هذا التوزيع في علم الاقتصاد من خلال دراسة توزيع الدخول (Incomes). عندما تكون الدخول متجاوزة لحد معلوم موجب مثل K.

ان معولية أنموذج باريتو للفشل تنشا كخليط من التوزيعات الاسية، وان هذا الخليط يمتلك دالة مخاطرة (Hazard Function) متناقصة مع الزمن وعلى هذا الاساس فان معولية أنموذج باريتو للفشل لها تطبيقات متنوعة عند دراسة معولية الانظمة المختلفة [3].

3. الهدف من البحث Purpose of research

يهدف هذا البحث في جانبه النظري الى اشتقاق مقدر بيز لدالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول (Pareto dist. Of the first kind)، ثم اجراء مقارنة بين هذا المقدر ومقدر الامكان الاعظم وذلك بتوظيف اسلوب المحاكاة بطريقة (Monte-Carlo) لغرض التوصل الى افضل طريقة لتقدير هذه الدالة.

4. الجانب النظري: Theoretical Part

1.4 توزيع باريتو من النوع الاول: Pareto dist. Of the first kind

ان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) لتوزيع باريتو من النوع الاول واحيانا يسمى العام او التقليدي وايضا يسمى النوع الاوربي[2]، هي بحسب الصيغة الاتية:

$$f(x,\alpha,k)=\begin{cases}\dfrac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha-1}} & ,x\geq k\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad \dots(1)$$

حيث ان $\alpha > 0$ تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter) وان $k > 0$ هي معلمة القياس (Shape Parameter).

وتكون دالة المعولية لهذا التوزيع هي:

$$R(t) = P(X > t)$$

$$= \int_t^{\infty} f(x;\, \alpha, k)dx$$

$$= \alpha k^{\alpha} \int_t^{\infty} x^{-\alpha-1} dx$$

$$\Rightarrow R(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (2)$$

2.4 مقدر الامكان الاعظم لدالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول[3]:

ان طريقة الامكان الاعظم هي من الطرائق التقليدية في التقدير وتعتمد على افتراض مفاده ان المعلمة المطلوب تقديرها هي كمية ثابتة. وتعد هذه الطريقة ذات خصائص جيدة من اهمها خاصية الثبات.

يمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة على انه قيم المعلمتين التي تجعل دالة الامكان للمشاهدات في نهايتهما العظمى.

لتكن $(X_1, X_2, \ldots . X_n)$ عينة عشوائية *بحجم* n *مسحوبة* من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو من النوع الاول ذو المعلمتين (α, k).

ان دالة الامكان للمشاهدات هي:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha, k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{a^n k^{na}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a+1}}$$

$$\Rightarrow \ln\ L = n\ln a + na\ln k - (a+1) \sum_{i=1}^{n} In x_1 \qquad \ldots (3)$$

وبالاشتقاق الجزئي للمعادلة (3) بالنسبة لـ a, k نحصل على معادلتي الامكان :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\ln k - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \qquad \ldots (4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial k} = \frac{\text{na}}{\text{k}} \qquad \ldots (5)$$

بمساواة المعادلة (4) بالصفر نجد ان :

$$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{k}\right)} \quad \dots(6)$$

بالنسبة للمعادلة (5) فانه لا يمكن حلها بالطريقة الاعتيادية لان الدالة $\ln L$ تكون غير محدودة بالنسبة لـ k، حيث انها متزايدة وبما ان k هي الحد الادنى للمتغير العشوائي X فان $\ln L$ يمكن تعظيمها تحت شرط القيد:

$$\hat{k} \leq \operatorname*{Min}_{i} X_i \quad \dots(7)$$

من المتباينة (7) نجد ان قيمة $\hat{k}$ التي تجعل دلة الامكان في نهايتها العظمى هي:

$$\hat{k} = \operatorname*{Min}_{i} X_i = x_{(1)} \quad \dots(8)$$

حيث $x_{(1)}$ هي اصغر قيمة في العينة المشاهدة

وبما ان مقدرات الامكان الاعظم تتصف بخاصية الثبات فان:

$$\hat{R}_{ML}(t) = \left(\frac{\hat{k}_{ML}}{t}\right)^{\hat{\alpha}_{ML}} \quad \dots(9)$$

3.4 طريقة بيز: Bayes Method

في هذه الطريقة نفترض ان المعلمتين k, α هي متغيرات عشوائية وهنالك دالة خسارة والمطلوب الحصول على مقدر دالة المعولية الذي يجعل الخسارة المتوقعة في نهايتها الصغرى.

حسب اسلوب الباحث (Jeffry) فان الدالة الاحتمالية الاولية غير المعلوماتية لكل من k, α هي:

$$J_1(\alpha)\alpha\frac{1}{\alpha}\ ,J_2(\alpha)\alpha\frac{1}{k} \quad \dots(10)$$

وعلى هذا الاساس فان الدالة الاحتمالية الاولية المشتركة للمعلمتين العشوائيتين المستقلتين k, α هي:

$$J(\alpha,k)\alpha J_1(\alpha)J_2(k)$$

$$\Rightarrow J(\alpha,k)\alpha\frac{1}{\alpha k} \quad \dots(11)$$

وباستخدام صيغة بيز (Bayes formula) فان دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لـ k, α هي:

$$h((\alpha,k|x_1,\dots,x_n)\propto \quad \alpha^{n-1}k^{n\alpha-1}exp\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]$$

$$\Rightarrow h((\alpha,k|x_1,\dots,x_n) = C \quad \alpha^{n-1}k^{n\alpha-1}exp\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i\right] \dots(12)$$

اذ ان C هو ثابت التناسب الذي يمثل مقلوب دالة الكثافة الحدية $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ اي ان:

$$C^{-1} = \int_0^{\infty}\int_0^{x(1)} \alpha^{n-1} k^{n\alpha-1}\ exp\left[-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right] dk\, d\alpha$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{exp(-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)}{n} \cdot \frac{\Gamma\,(n-1)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left({x_i}/{x_{(1)}}\right)\right]^{n-1}} \quad \dots (13)$$

وبفرض دالة خسارة تربيعية متاحة فان مقدار بيز لدالة المعولية هو التوقع اللاحق لهذه الدالة:

$$\hat{R}_B(t) = E[R(t)|x_1,\dots,x_n]$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{x(1)} R(t)\ h(a,k|x_1,\dots,x_n)dk\,da$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{1+\frac{\ln\left[\frac{t}{x_{(1)}}\right]}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left({x_i}/{x_{(1)}}\right)}}\right]^{n-1}$$

$$\Rightarrow \hat{R}_B(t) = \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{1+\frac{\hat{\alpha}_{ML}}{n}\ln\left({t}/{x_{(1)}}\right)}\right]^{n-1} \quad \dots (14)$$

حيث ان $\hat{\alpha}_{ML}$ هو مقدار الامكان الاعظم للمعلمة α :

$$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left({x_i}/{x_{(1)}}\right)}$$

5. الجانب التجريبي: Expremental Part

في هذا الجانب سنقوم بوصف مراحل تجارب المحاكاة

المرحلة الاولى:

1- اختيار القيم الافتراضية للمعلمتين k, α ولتكن

K=1,1.5 , α=1,2.7

وعليه فان هنالك اربعة تجارب للمحاكاة

2 – حجوم العينات الافتراضية n= 10, 30, 50, 100

وان تكرار كل تجربة هو L=1000

المرحلة الثانية:

توليد بيانات وفق توزيع باريتو من النوع الاول باستخدام دالة الكثافة التجمعية (c.d.f) ولتكن *F(x)*

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$$

افرض المتغير العشوائي *U* يتوزع توزيعا مستمرا على الفترة (0,1) فان:

$$u = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow x = k(1-u)^{-1/\alpha} \qquad \dots (15)$$

ان المتغير العشوائي *U* يتم توليده باستخدام الحاسبة الالكترونية وفق الصيغة *U=RND(1)*

المرحلة الثالثة

تقدير دالة المعولية لانموذج باريتو للفشل بالمعلمتين (*α,k*) حسب المعادلتين (9) و(14).

المرحلة الرابعة

المقارنة بين طريقتي التقدير باستخدام المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطا التكاملي

$$IMSE\left(\hat{R}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left[\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{nt}\left(\hat{R}_i(t_j) - R(t_j)\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow IMSE\left(\hat{R}(t)\right) = \frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{nt} MSE\left(\hat{R}_i(t_j)\right) \qquad \dots (16)$$

حيث ان L ,....,i=1,2 ,n_t حدود المتغير t_i من الحد الادنى الى الحد الاعلى و L عدد مكررات التجربة.

6. الاستنتاجات والتوصيات: Conclusions & Recommendations

1. بالرجوع الى الجدول في الملحق اظهرت تقديرات دالة المعولية باستخدام طريقة بيز متوسط مربعات الخطأ التكاملي(IMSE) اكفا من متوسط مربعات الخطا التكاملي (IMSE) باستخدام طريقة الامكان الاعظم ولكافة حجوم العينات.
2. اظهرت النتائج ان قيم (IMSE) تتناقص بزيادة حجم العينة وكذلك يحصل تقارب بين المقدرين وهذا يتطابق مع النظرية الاحصائية.
3. يوصي الباحثان باعتماد طريقة بيز لتقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول.
4. يوصي الباحثان باجراء بحوث بنفس الاتجاه تخص نماذج باريتو للفشل من النوع الثاني وكذلك النوع الثالث.

7. المصادر: references

1. **Hodge, B. C. (1997): Estimation Pareto's constant and Gini Coefficient of the pareto dist., a thesis in statistics, university of Nevada, Las Vegas.**
2. **Rytgaard, M. (1990): Estimation in Pareto dost> Astin, Bulletin, Vol. 20, No. 2 pp. 201-216.**
3. **Sarhan A. M. (2003): Estimation of parameters in Pareto model in the presence of masked data, Reliability Engineering & system safety, Vol. 82, pp. 75-83.**

الملحق

الجدول الاتي يبين متوسط مربعات الخطا التكامل (IMSE) لتقدير دالة المعولية لجميع التجارب.

Model	n	ML	Bayes	Best
I (α=1, k=1)	10	0.010879	0.008733	Bayes
	30	0.0103115	0.002885	Bayes
	50	0.001952	0.001876	Bayes
	100	0.000935	0.000920	Bayes
II (α=1, k=1.5)	10	0.016453	0.011344	Bayes
	30	0.004086	0.003608	Bayes
	50	0.002479	0.002303	Bayes
	100	0.001160	0.001179	ML
III (α=2.7, k=1)	10	0.005433	0.005049	Bayes
	30	0.001484	0.001467	Bayes
	50	0.000930	0.000932	ML
	100	0.000443	0.000446	ML
IV (α=2.7, k=1.5)	10	0.10978	0.008671	Bayes
	30	0.003007	0.002783	Bayes
	50	0.001871	0.001796	Bayes
	100	0.000891	0.000876	Bayes