مقارنة بين طرائق تقدير معالم الانحدار عند وجود مشكلة عدم تجانس التباين مع التطبيق العملي

م. د. طه حسين علي   م. تارا احمد حسن
جامعة صلاح الدين/ اربيل - كلية الادارة والاقتصاد- قسم الاحصاء

الملخص

تم في هذا البحث تقدير الأوزان المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقـدير معلمـات الانحدار الخطي البسيط عندما يكون المتغير المعتمد متغيرا نوعيا ذا فئتين (الذي يؤدي إلى وجود مـشكلة عدم تجانس تباين الخطأ العشوائي) باستخدام أسلوب بيز المتسلسل بدلا من الأسلوب الاعتيادي المـستخدم سابقا، حيث أن أسلوب بيز المتسلسل يوفر آلية تناول المشاهدات الواحدة تلو الأخرى وبشكل متسلـسل أي أن كل مشاهدة جديدة سوف تضيف معلومة جديدة في تقدير معلمة التوزيع الاحتمالي لظاهرة معينـة مـن محاولات برنولي التي تمثل المتغير المعتمد في معادلة الانحدار الخطي البسيط فضلا عن المعلومات المتأتية من الخبرة أو التجارب السابقة أو الاعتماد الشخصي، وتضمن البحث إجراء مقارنة بين الأسلوبين من خلال التطبيق العملي لهذين الأسلوبين في تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط للعلاقـة بـين الـدخل القابـل للتصرف وحالة تملك الدار الساكن فيه لموظفي كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة صلاح الدين/ اربيل.

Abstract

In this research weights, which are used, are estimated using General Least Square Estimation to estimate simple linear regression parameters when the depended variable, which is used, consists of two classes attributes variable (for Heteroscedastic problem) depending on Sequential Bayesian Approach instead of the Classical approach used before, Bayes approach provides the mechanism of tackling observations one by one in a sequential way, i .e each new observation will add a new piece of information for estimating the parameter of probability estimation of certain phenomenon of Bernoulli trials who research the depended variable in simple regression linear equation. in addition to the information deduced from the past experiences or self dependence. the research also contains a comparison between both approaches using practical application of both approaches for estimating the simple linear regression between the income and the state of having a house living in for the official in college of Administration and Economics in Salah-Alden University/Erbil .

1 : المقدمة

في بعض الأحيان يكون لدينا مسألة إيجاد العلاقة الخطية بين متغيرين أحدهما كمي يمثل المتغير المستقل والآخر نوعي ذا فئتين يمثل المتغير المعتمد في نموذج الانحدار الخطي البسيط، وبما أن المتغير المعتمد من النوع النوعي وله توزيع برنولي أي أن كل مشاهدة لها تباين (تباين توزيع برنولي) ربما يختلف عن المشاهدات الأخرى مما سوف يؤدي إلى عدم تجانس تباين الخطأ العشوائي وأحد طرق معالجة هذه المشكلة هو استخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)، للمزيد من المعلومات أنظر [Draper & Smith, 1981, pp.108-116 , {6}] والتي نستخدم أوزان نستطيع تقديرها باستخدام مقلوب التباين الذي يمثل مقلوب تباين توزيع برنولي (خاشع الراوي، تحليل الانحدار،1987 ، ص438، {2}) والذي يمثل الأسلوب الاعتيادي المستخدم من قبل العديد من الباحثين .

من ناحية أخرى يعتبر تحليل بيز المتسلسل (Bayesian Sequential Analysis) الذي قدمه الباحث Wald {8}, عام (1946) من المواضيع المهمة التي اعتمدت في أسلوبها في تقدير معلمات التوزيع الاحتمالي على المعلومات التي توفرها المشاهدات وبشكل متسلسل أي (أن كل مشاهدة جديدة سوف تضيف معلومة جديدة في تقدير معلمة التوزيع الاحتمالي لتلك الظاهرة) فضلا عن المعلومات التي نحصل عليها من الخبرة أو التجارب السابقة أو الاعتماد الشخصي حول معلمة هذا التوزيع الاحتمالي وهذا ما يميزها عن المدرسة الكلاسيكية أو المعاينة (Classical or Sampling Inference) التي تعتمد على مشاهدات العينة فقط في تقدير معلمة التوزيع الاحتمالي .

لذلك سوف يتناول البحث استخدام الأسلوب الاعتيادي في تقدير تباين المشاهدات (تباين توزيع برنولي) والتي من خلالها يتم تقدير الأوزان المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معلمات الانحدار للحصول على نموذج الانحدار الخطي البسيط، وكذلك استخدام أسلوب بيز المتسلسل في إيجاد تباين التوزيع النهائي (توزيع بيتا) والتي من خلالها يتم تقدير الأوزان المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معلمات الانحدار للحصول على نموذج الانحدار الخطي البسيط، متضمنا تطبيق عملي يوضح كيفية استخدام أسلوب بيز في تقدير الأوزان ومقارنتها مع الأسلوب الاعتيادي (وليس لدراسة حالة في المجتمع وتحليلها بشكل كامل) وذلك من خلال دراسة العلاقة بين الدخل القابل للتصرف وحالة تملك الدار الساكن فيه لموظفي كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة صلاح الدين/ اربيل، باستخدام مجموعة من البرامج الإحصائية الجاهزة للحاسبة الكترونية وأجراء مقارنة بين النموذجين من خلال إيجاد متوسط مربعات الخطأ MSE لكلا النموذجين .

2 : تقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط عندما يكون المتغير المعتمد متغيراً نوعياً ذا فئتين باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة (الاعتيادي) :

هنالك حالات كثيرة يكون فيها المتغير المعتمد لدالة الانحدار الخطي البسيط عبارة عن متغير نوعي له قيمتان (Two Possible Outcomes) فمن الممكن في مثل هذه الحالات استخدام المتغير الوهمي y تعبيراً عن المتغير النوعي المعتمد (خاشع الراوي، 1987، ص 402، {2}) حيث إذا كان المتغير النوعي K من المستويات (Levels) أو الأقسام أو المجاميع أو الفئات (Classes) فانه يمكن تمثيله بـ (K- 1) من المتغيرات الوهمية وهنا سوف نفرض أن لدينا مستويين فقط أي أن (K= 2) فسوف يكون لدينا متغير معتمد واحد يأخذ القيم واحد أو صفر حيث أن :

$$y = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الصفة المدروسة موجودة} \\ 0 & \text{إذا كانت الصفة المدروسة غير موجودة} \end{cases}$$

إن المشكلة الرئيسية في تحليل الانحدار باستخدام المتغيرات الوهمية هنا هو كـون تبـاين الخطـأ لا يتــوزع توزيعــاً طبيعيــاً، حيــث أن المتغيــر المعتمــد الــوهمي y يتــوزع توزيــع برنــولي (Bernoulli Distribution) لذا فان احتمال $(y=1)$ هو p_i أي أن :

$$p(y=1)=p_i$$

حيث أن :-

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$ و n تمثل حجم العينة.

وأن احتمال $(y=0)$ هو q_i و أن :

$$q_i = 1 - p_i$$

أي :-

$$p(y=0)=1-p_i$$

لذا فان تباين الخطأ وبالاعتماد على تباين توزيع برنولي هو:

$$V(e_i/x_i)=V(y_i/x_i)=p_i(1-p_i)$$

حيث أن x_i تمثل المتغير المستقل في معادلة الانحدار الخطي البسيط .

فإذا عوضنا عن p_i بـالمقدار $(\beta_0+\beta_1 x_i)$ نجد أن :-

$$V(e_i/x_i)=(\beta_0+\beta_1 x_i)(1-\beta_0-\beta_1 x_i)$$

لذا فان تباين الخطأ غيـر متجـانس ممـا يـدعو إلـى اسـتخدام المربعـات الـصغرى الموزونـة (Weighted Least Squares) لمعالجة هذه المشكلة، ويمكن الحصول على الوزن w_i مـن خـلال إيجاد معكوس التباين، (محمد وأموري، 1990، ص136، {4}) وكالأتي:-

$$w_i = \frac{1}{V(e_i/x_i)} = \frac{1}{V(y_i/x_i)}$$

$$= \frac{1}{P_i(1-P_i)} = \frac{1}{(\beta_0+\beta_1 x_i)(1-\beta_0+\beta_1 x_i)}$$

وبما أن أقيام (β_0 و β_1) غير معلومة، فيمكن تقديريهما بطريقة المربعـات الـصغرى الاعتياديـة وإيجاد β_0 وβ_1 ومن ثم إيجاد قيم $\hat{y}_i$ التقديرية وعليه فان الأوزان w_i يمكن أن نحصل عليهـا مـن خلال الصيغة الآتية وكما يأتي :

$$\hat{w}_i = \frac{1}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)}$$

وعلى هذا الأساس يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معلمات الانحدار ($\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$) المعدلة وكما يأتي :-

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma\hat{w}_i & \Sigma\hat{w}_i x_i \\ \Sigma\hat{w}_i x_i & \Sigma\hat{w}_i x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma\hat{w}_i y_i \\ \Sigma\hat{w}_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

يمكن إيجاد الانحراف القياسي لمعلمات الانحدار واختبار مدى معنوياتهم باستخدام اختبار t، (للمزيد من المعلومات أنظر أموري وسعيد، القياس الاقتصادي التطبيقي، (1990)، {1}) حيث أن:

$$S_{\hat{\beta}_1} = \left(\frac{1}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \right)^{1/2}$$

$$S_{\hat{\beta}_0} = \left(\frac{1}{\Sigma\hat{w}_i} + \bar{x}^2 S^2_{\hat{\beta}_1} \right)^{1/2}$$

3 : تقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط عندما يكون المتغير المعتمد متغيراً نوعياً ذا فئتين بأستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة بالاعتماد على أسلوب بيز المتسلسل :

لدينا المتغير المعتمد y يتوزع توزيع برنولي بالمعلمة p (خاشع الراوي، 1987، ص 437، {2}) أي أن :

$$y \sim \mathrm{Ber}(p)$$

وباستخدام تحليل بيز المتسلسل والنموذج الحركي العام لتوزيع برنولي، فأن دالة الترجيح (Likelihood Function) للمشاهدة الأخيرة y_n [Harrison & Stevens , (1971), pp.341-362, {7}] تكون كالآتي :

$$p(y_n/p) = p^{y_n}(1-p)^{1-y_n} \qquad \dots (3.1)$$

حيث أن $y_i = 0,1$ و أن i = 1, 2, 3, …, n

ويمكن كتابة دالة الترجيح للمشاهدة الأخيرة y_n وصفيا كما يأتي :

$$(y_n/p) \sim \mathrm{Ber}(p)$$

وأن التوزيع الأولي (Prior Distribution) للمشاهدة قبل الأخيرة y_{n-1} هو عبارة عن توزيع بيتا بالمعلمات a_{n-1} ، b_{n-1} أي أن :

$$p(p / y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \,\alpha\, p^{a_{n-1}-1}(1-p)^{b_{n-1}-1} \qquad \dots (3.2)$$

وباستخدام نظرية بيز لدينا [Wald , 1947 , p.42 , {8}] :

$$p(p / y_1, y_2, \dots, y_n) \propto p(p / y_1, y_2, \dots, y_{n-1})(y_n / p)$$

أي أن التوزيع النهائي (Posterior Distribution) للمعلمة p (طه، 2005، ص248، {3}) يكون كالآتي :

$$p(p/y_1,y_2,\dots,y_n)\propto p^{a_{n-1}-1}(1-p)^{b_{n-1}-1}p^{y_n}(1-p)^{1-y_n}$$

$$=p^{(a_{n-1}+y_n)-1}(1-p)^{(b_{n-1}-y_n+1)-1}$$

والتي هي نواة توزيع بيتا (The Kernel of Beta Distribution)، لذلك فان التوزيع النهائي الكامـل (The complete posterior distribution) يكون كالآتي :

$$p(p/y_1,y_2,\dots,y_n)=\frac{\Gamma(a_n+b_n)}{\Gamma(a_n)\Gamma(b_n)}p^{a_n-1}(1-p)^{b_n-1}\qquad\dots(3.3)$$

حيث أن :

$$a_n=a_{n-1}+y_n$$
$$b_n=b_{n-1}-y_n+1$$

عندما $n=1$ فان :

$$a_1=a_0+y_1$$
$$b_1=b_0-y_1+1$$

وعندما $n=2$ فان:

$$a_2=a_1+y_2$$
$$b_2=b_1-y_2+1$$

وبتعويض القيم a_1 و b_1 نحصل على ما يأتي :-

$$a_2=a_0+y_1+y_2=a_0+\sum_{i=1}^{2}y_i$$

$$b_2=b_0-y_1+1-y_2+1=b_0-\sum_{i=1}^{2}y_i+2$$

وهكذا إلى n من المشاهدات، فنحصل على المعادلتين الآتيتين :

$$a_n=a_0+\sum_{i=1}^{n}y_i\qquad\dots\quad(3.4)$$

$$b_n=b_0-\sum_{i=1}^{n}y_i+n\qquad\dots\quad(3.5)$$

حيث أن قيم المعلمات a_0 و b_0 هي قيم أولية يمكن أن نحصل عليها من خلال الخبرة والتجارب السابقة حول المشاهدات التي يستخدم فيها هذا التوزيع .

وعلى هذا الأساس يمكن الحصول على معدل وتباين توزيع بيتا [Box & Tiao , (1973) , p.12 , {5}] وكما يأتي :

$$\mu_{B_y} = \left(\frac{a_n}{a_n + b_n} \right) = \left(\frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i}{a_0 + b_0 + n} \right) \qquad \dots (3.6)$$

$$\sigma^2_{B_y} = \frac{a_n b_n}{(a_n + b_n)^2 (a_n + b_n + 1)} \qquad \dots (3.7)$$

لذلك فان أوزان بيز المقدرة وبالاعتماد على قيم $\hat{y}_i$ المقدرة من النموذج الخطي الذي اعتمد على طريقة المربعات الصغرى تكون كما يأتي :-

$$\hat{w}_{B_n} = \frac{1}{\sigma^2_{B_y}} = \frac{1}{\dfrac{\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i\right)\left(b_0 - \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i + n\right)}{(a_0 + b_0 + n)^2 (a_0 + b_0 + n + 1)}}$$

إذن :

$$\hat{w}_{B_n} = \frac{(a_0 + b_0 + n)^2 (a_0 + b_0 + n + 1)}{\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i\right)\left(b_0 - \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i + n\right)} \qquad \dots (3.8)$$

تكون كالآتي وهذا يعني أن وزن المشاهدة الأولى هو :

$$\hat{w}_{B_1} = \frac{(a_0 + b_0 + 1)^2 (a_0 + b_0 + 2)}{(a_0 + \hat{y}_1)(b_0 - \hat{y}_1 + 1)}$$

ووزن المشاهدة الثانية هو :

$$\hat{w}_{B_2} = \frac{(a_0 + b_0 + 2)^2 (a_0 + b_0 + 3)}{\left(a_0 + \sum_{i=1}^{2} \hat{y}_i\right)\left(b_0 - \sum_{i=1}^{2} \hat{y}_i + 2\right)}$$

وهكذا إلى أن نحصل على وزن المشاهدة الأخيرة y_n كما في المعادلة (3.8)، ونلاحظ مما تقدم أن كل وزن اخذ بنظر الاعتبار المعلومات الأولية والتي نحصل عليها من الخبرة أو التجارب السابقة فضلا عن معلومات المشاهدات، أي من المشاهدة الأولى والثانية... وحتى المشاهدة التي يقدر وزنها، وهذه الأوزان يمكن الاعتماد عليها لتقدير معلمات الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة، أي أن :

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{B_0} \\ \hat{\beta}_{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{B_i} & \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{B_i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{B_i} x_i & \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{B_i} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{B_i} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{B_i} x_i y_i \end{bmatrix} \quad \ldots(3.9)$$

وبذلك نحصل على نموذج خط الانحدار البسيط باستخدام أسلوب بيز المتسلسل، وكما يأتي :

$$\hat{y}_{B_i} = \hat{\beta}_{B_0} + \hat{\beta}_{B_1} x_i \quad \ldots(3.10)$$

4: الجانب التطبيقي

لغرض توضيح كيفية استخدام أسلوب بيز المتسلسل ومقارنتها مع الطريقة الاعتيادية في تقدير أوزان المشاهدات المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط عندما يكون المتغير المعتمد متغيراً نوعياً ذا فئتين، (وليس لدراسة مشكلة معينة في المجتمع وتحليلها بشكل كامل والتي هي خارج نطاق هدف البحث) قام الباحثان بدراسة العلاقة بين الدخل القابل للتصرف x وحالة تملك الدار الساكن فيه لعينة عشوائية تتألف من سبعين موظفاً في جامعة صلاح الدين كلية الإدارة والاقتصاد، وكانت النتائج كما يأتي:-

الجدول رقم (1)
بيانات الدخل القابل للتصرف لموظفي كلية الإدارة والاقتصاد وحالة تملكهم للدار

No. of Imp.	Income (X)	Cases(Y)	No. of Imp.	Income (X)	Cases(Y)	No. of Imp.	Income (X)	Cases(Y)
1	706800	Yes	25	200650	No	49	679800	Yes
2	576600	No	26	153350	No	50	509850	Yes
3	355200	Yes	27	4337750	Yes	51	501200	Yes
4	266900	No	28	346550	Yes	52	434000	Yes
5	337900	No	29	449300	No	53	419600	Yes
6	273600	Yes	30	533800	No	54	469600	No
7	273600	Yes	31	1833000	No	55	412900	No
8	273600	Yes	32	1846000	Yes	56	474300	Yes
9	200650	Yes	33	1040000	No	57	419600	Yes
10	211200	Yes	34	800000	Yes	58	357200	Yes
11	266900	No	35	852800	Yes	59	352400	Yes
12	273600	No	36	1040000	Yes	60	352400	Yes
13	253450	Yes	37	1040000	Yes	61	362950	No
14	164400	No	38	852800	No	62	518700	No
15	177200	No	39	808650	Yes	63	606800	No
16	177200	No	40	606800	Yes	64	934200	Yes
17	164350	Yes	41	884200	Yes	65	352400	Yes
18	164350	No	42	679850	Yes	66	346650	Yes
19	135900	Yes	43	952800	Yes	67	506150	No
20	136600	Yes	44	474300	Yes	68	751450	Yes
21	101000	No	45	629850	Yes	69	346650	Yes
22	96000	Yes	46	509850	No	70	426300	Yes
23	96000	Yes	47	419600	No			
24	96000	Yes	48	524300	No			

المصدر: تم جمع البيانات من قبل الباحثان في وحدة الحسابات/ كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة صلاح الدين/ أربيل. لعام2005 .

إن المتغير المعتمد y يمثل حالة التماك وهو متغير نوعي له فئتان وعليه يمكن تمثيله بمتغير وهـي يأخذ القيم صفر وواحد وكالآتي :-

$$y = \begin{cases} 1 & \text{للموظف الذي يملك الدار} \\ 0 & \text{للموظف الذي لا يملك الدار} \end{cases}$$

وعلى هذا الأساس يمكن إعطاء القيمة (1) للموظف الذي يملك الدار وصفر للموظف الذي لا يملك الـدار، وعليه نحصل على الجدول الآتي :-

الجدول رقم (2)
تمثيل المتغير المعتمد (الوهمي) بما يعادلها (0,1)

No. of Imp.	Income (X)	Cases(Y)	No. of Imp.	Income (X)	Cases(Y)	No. of Imp.	Income (X)	Cases(Y)
1	706800	1	25	200650	0	49	679800	1
2	576600	0	26	153350	0	50	509850	1
3	355200	1	27	4337750	1	51	501200	1
4	266900	0	28	346550	1	52	434000	1
5	337900	0	29	449300	0	53	419600	1
6	273600	1	30	533800	0	54	469600	0
7	273600	1	31	1833000	0	55	412900	0
8	273600	1	32	1846000	1	56	474300	1
9	200650	1	33	1040000	0	57	419600	1
10	211200	1	34	800000	1	58	357200	1
11	266900	0	35	852800	1	59	352400	1
12	273600	0	36	1040000	1	60	352400	1
13	253450	1	37	1040000	1	61	362950	0
14	164400	0	38	852800	0	62	518700	0
15	177200	0	39	808650	1	63	606800	0
16	177200	0	40	606800	1	64	934200	1
17	164350	1	41	884200	1	65	352400	1
18	164350	0	42	679850	1	66	346650	1
19	135900	1	43	952800	1	67	506150	0
20	136600	1	44	474300	1	68	751450	1
21	101000	0	45	629850	1	69	346650	1
22	96000	1	46	509850	0	70	426300	1
23	96000	1	47	419600	0			
24	96000	1	48	524300	0			

المصدر: تم تصميم الجدول من قبل الباحثان.

وباستخدام مجموعة من البرامج الإحـصائية الجـاهزة منهـا Excel , Mnitab , SPSS تـم الحصول على ما يلي :-

أولا تم اختبار تجانس تباين الخطأ وكانت النتيجة متفقة مع النظرية الإحصائية وهي وجود مـشكلة عدم تجانس تباين الخطأ (لان قيمة P أكبر من 0.05 ، كما يلاحظ ذلك في الملحق A) ومن ثم تم تطبيـق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط الذي يوضح العلاقة بين الـدخل القابل للتصرف وحالة تملك الدار الساكن فيه وحصلنا على النموذج الآتي :

$$\hat{y}_i = 0.574334 + 9.95694E\text{-}8\, x_i$$

وعند تقدير أوزان المشاهدات بطريقة الأسلوب الاعتيادي وإيجاد المشاهدات الموزونة تم اختبار تجانس تباين الخطأ وكانت النتيجة عدم وجود مشكلة تجانس تباين الخطأ العشوائي (لان قيمة P أقل من 0.05، كما يلاحظ ذلك في الملحق A) والتي تم من خلالها تقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط، وحصلنا على النموذج الآتي :

$$\hat{y}_i = 16.69312108 - 2.7058E\text{-}05 \; x_i \qquad ...(4.1)$$

وأخيرا تم تقدير أوزان المشاهدات بطريقة أسلوب بيز المتسلسل باستخدام الصيغة (3.8) وعلى افتراض أن القيم الأولية ($a_0 = b_0 = 0.5$)، والحصول على مشاهدات جديدة تم من خلالها اختبار تجانس تباين الخطأ وكانت النتيجة عدم وجود مشكلة تجانس تباين الخطأ العشوائي (لان قيمة P أقل من 0.05 ، كما يلاحظ ذلك في الملحق A) ومن ثم استخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة لإعادة تقدير معلمات النموذج أعلاه، وحصلنا على النموذج الآتي:-

$$\hat{y}B_i = 1.083989903 - 9.02245E\text{-}08 \, x_i \qquad ...(4.2)$$

من خلال النماذج أعلاه يمكن المقارنة بين الأسلوب الاعتيادي وأسلوب بيز المتسلسل لاختيار أفضل طريقة لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط الملائم للبيانات أعلاه، ولهذا الغرض تم إيجاد متوسط مربعات الخطأ (MSE) ولكل النماذج أعلاه، باستخدام القانون الآتي :

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2}{n-2}$$

أو يمكن الحصول على قيم MSE للنماذج أعلاه من خلال جداول تحليل التباين المكونة لاختبار معنوية معامل الانحدار وكما يلاحظ ذلك من خلال الملحق A ومن ثم تلخيص هذه القيم في الجدول الآتي :

الجدول رقم (3)

متوسط مربعات الخطأ (MSE)

MSE	الطريقة المستخدمة
0.2370	طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية
0.1429	طريقة المربعات الصغرى الموزونة باستخدام الأسلوب التقليدي في تقدير الأوزان
0.0908	طريقة المربعات الصغرى الموزونة باستخدام طريقة أسلوب بيز المتسلسل في تقدير الأوزان

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن أسلوب بيز المتسلسل في تقدير الأوزان أدى إلى الحصول على متوسط مجموع مربعات خطأ أقل، مما يؤكد على أفضلية هذا الأسلوب في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط عند وجود مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ العشوائي .

الاستنتاجات والتوصيات

1- أمكانية استخدام أسلوب بيز المتسلسل في تقدير الأوزان المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط عندما يكون المتغير المعتمد متغيرا نوعيا ذا فئتين.
2- أسلوب بيز المتسلسل أدى إلى حصولنا على تقدير لمعلمات انحدار أفضل من الأسلوب التقليدي بالنسبة لدراسة العلاقة بين الدخل القابل للتصرف وحالة تملك الدار الساكن فيه لموظفي كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة صلاح الدين/ أربيل .
3- يوصي الباحثان باستخدام أسلوب بيز المتسلسل في تقدير الأوزان المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط عندما يكون المتغير المعتمد متغيرا نوعيا ذا فئتين عندما تتوفر معلومات أولية حول قيم المعلمات المقدرة.
4- يوصي الباحثان بأجراء دراسات مماثلة وذلك بأخذ قيم أولية مختلفة لاستخدامها كمعلومات أولية في تقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط للعلاقة أعلاه للحصول على أفضل تقدير ممكن لمعلمات الانحدار الخطي البسيط.
5- يوصي الباحثان بتناول دراسة مماثلة ولكن في تقدير معلمات الانحدار الخطي المتعدد .
6- يوصي الباحثان بتناول دراسة مماثلة ولكن في تقدير معلمات الانحدار غير الخطي بدلا من الانحدار الخطي البسيط الذي تناوله البحث.

المراجع

أولا- المراجع باللغة العربية

1- د. أموري هادي كاظم ود. سعيد علي هادي، (1990)، "القياس الاقتصادي التطبيقي"، جامعة بغداد .
2- د. خاشع محمود الراوي، (1987) ، "المدخل إلى تحليل الانحدار"، جامعة الموصل .
3- طه حسين علي، "نمذجة سلاسل ماركوف لعمليات برنولي"، بحث منشور في مجلة زانكو جامعة صلاح الدين/ أربيل، العدد (26)، كانون الأول (2005) .
4- د. محمد مناجد الدليمي ود. أموري هادي كاظم، (1990)، "تحليل الانحدار بالأمثلة"، جامعة بغداد .

ثانيا- المراجع باللغة الأجنبية

1- Box & Tiao , (1973) , " Bayesian Inference in Statistical Analysis " Addison–Wesley publishing company , California , London , p.12 .
2- Draper N.R. & Smith H. , (1981) , " Applied Regression Analysis " , John Wiley & Sons , Inc. Published simultaneously in Canada .
3- Harrison P. J. & Stevens C. F. (1971) , " A Bayesian approach to short – term forecasting " , Operation Research ,Vol. 22 , No.2 , pp. 341-362 .
4- Wald A. , (1947) , " Sequential Analysis " , Wiley & Sons , Inc. , Newyork .

الملحق A

اختبار التجانس للمشاهدات الأصلية

Test of Homogeneity of Variances المشاهدات الأصلية			
Levene Statistic	df1	df2	Sig.
6.723	1	68	.012

ANOVA المشاهدات الأصلية					
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.514	1	.514	2.169	.142
Within Groups	16.116	68	.237		
Total	16.630	69			

اختبار التجانس للمشاهدات الموزونة بالطريقة الاعتيادية

Test of Homogeneity of Variances ynew			
Levene Statistic	df1	df2	Sig.
7.079	1	68	.04

ANOVA ynew					
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	2.337	1	2.337	16.354	.0132
Within Groups	9.7172	68	0.1429		
Total	12.0542	69			

اختبار التجانس للمشاهدات الموزونة بالطريقة المقترحة

Test of Homogeneity of Variances ysug			
Levene Statistic	df1	df2	Sig.
8.059	1	68	.0016

ANOVA ynew					
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	2.337	1	2.337	25.738	.0018
Within Groups	6.1744	68	0.0908		
Total	8.5114	69			