امثلة على تقديرات الامكان الاعظم غير الوحيدة

أ. سليم اسماعيل الغرابي
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

1. المقدمة

افرض ان (X1, X2, ... , Xn) هي عينة عشوائية من توزيع له دالة احتمالية الكثافة $f(x,\theta)$. المثال المعتاد في مثل هكذا تقدير للامكان الاعظم (MLE) $\hat{\theta}$ θL_1 هو ليس وحيد باخذ $f(x,\theta)$ ليكون كثافة منتظمة عليه، مثل $(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$.

انظر [Bicked and Doksum (1977, P111)] او [Hogg and Craig (1978, P(207)] بالاضافة الى احضار بعض الامور غير الطبيعية. هذا المثال وصف ذلك من الممكن له MLE'S في فترة معينة.

في هذا المبحث تكون فئة كبيرة من الامثلة $f(x,\theta)$ والتي تكون مع احتمالية موجبة. الـ MLE بنيت على مثال بحجم 2 هو غير وحيد في طريقة اساسية، ذلك ان الاختبارات ممكنة لـ $\hat{\theta}$ ليست في الفترة. الكثافات $f(x,\theta)$ لبعض معنى طبيعي ذلك يمكن اختبارها ان تكون احادية لاجل ان (MLE) مبنيه على ملاحظة مفردة هي دائماً وحيدة. الكثافة الكوشية مع معلمة محاية هي هكذا امثال. المناقشة يمكن ان تكون متقطعة لتوضيح غير وحيدة اساسية لـ MLE لاجل امثلة بحجوم اختبارية وان مناقشة مسالة بناء كفوء لتقديرات عدم وحدانية MLE'S. [انظر Lehmann 1980].

2. عدم وحدانية الـ MLE لاجل فئة في الكثافات

The Nonuiqueness of the MLE for Class of Densities.

افرض ان g هي دالة احتمالية الكثافة معرفة على R تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1. g هي دالة مستمرة ومتماثلة حول نقطة الاصل 0 وهي موجبة بجميع القيم.
2. g هي مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين لجميع القيم عدا ربما عند 0 .
3. اذا كتبنا $h=\log g$ فان $h''(y)\succ 0$ لبعض قيم y التي لا تساوي صفر.

الحالة مع هكذا كثافة يمكن ان تكون مركبة هي سوف تناقش اخيراً في نهاية هذا المبحث.

افرض ان (x_1,x_2) هو متغير عشوائي من توزيع له دالة احتمالية الكثافة $f(x,\theta)=g(x-\theta)$ حيث ان $x\in R$ وان $\theta\in R$.

افرض ان x_1,x_2 هما قيم مشاهده لـ X_1,X_2 على التوالي، نكتب $\overline{X}=(X_1+X_2)/2$ وان $\Delta=(X_1-X_2)/2$ دالة الامكان الاعظم هي تعطى بالشكل:

$$L(\theta/X)=g(X_1-\theta)\,g(X_2-\theta)$$
$$=g(\overline{X}+\Delta-\theta)\,g(\overline{X}-\Delta-\theta)$$

فرضية 1 ترينا انه لكل $K\geq 0$:

$$L(\overline{X}+K/X)=L(\overline{X}-K/X)=g(\Delta+K)\,g(\Delta-K).....(1)$$

هكذا $L(\hat{0}/X)$ هي متماثلة حول $\overline{X}$.

اذاً اما $\hat{\theta}=\overline{X}$ او ان θ ليست وحيدة حسب الفرضية 2 ، 3 ، يوجد (a,b) بحيث انه لكل y(a,b)، يوجد $\delta\succ 0$ بحيث ان

$$h(y+\delta)-h(y)\succ h(y)-h(y-\delta)$$
$$or\;\; g(y+\delta)\,g(y-\delta)\succ\left|g(y)\right|^2\;\;.....(2)$$

افرض ان x_1, x_2 هي بحيث ان $\Delta \in (a,b)$. فان (2) ، (1) ترينا بانه يوجد $\delta \succ 0$ بحيث ان

$$L(\bar{X} \pm \delta / X) = g(\Delta+\delta)\, g(\Delta-\delta) \succ |g(\Delta)|^2 \setminus = L(\bar{X} / X)$$

اذاً ليست وحيدة $\hat{\theta} \neq \bar{X}$, $\hat{\theta}$ is not uique

وان الاختبار المحتمل لـ $\hat{\theta}$ ليس في الفترة الاحتمالية ذلك ان $\hat{\theta}$ هي ليست وحيدة هي علـى الاقـل اكبر في الاحتمالية $|X_1 - X_2|/2$ تعود الى (a,b). الاحتمالية الاخيرة هي موجبة بسبب ان g هي موجبة لكل القيم.

الان نرى انه يوجد اعداد كبيرة لكثافات g تحقق الشروط المطلوبه الشروط 1 ، 2 هي سهلة التقابل. افرض ان معاكس L' 3، $h''(y) \leq 0$ لكل قيم y التي لا تساوي صفر. فانه من السهل ان نرى ان $g(x)$ نتيجة الى الصفر عند التغير الاسي عندما $X \to \mp\infty$ ، وان g لها دالة مولدة العزم. في التطبيق g يجـب ان يكون لها عزم محدود لكل الترتيبات اذا كان $h''(y) \leq 0$ لكل القيم وهكذا اذا كانت g تحقق 1 ، 2 ولها عزم غير محدد لبعض الرتبة، فان g سوف تحقق 3 اوتوماتيكياً.

انه من الواضح اننا نستطيع اختبار g لان تكون احادية مع منوال وحيد. وهكذا لعينة ذات حجـم 1. الـ MLE يكون وحيد. الكثافات g التي تحقق

$$g^2(y) \geq g(y+\delta)\, g(y-\delta) \quad ....(3)$$

لكل $\delta \in R, y \in R$ تسمى لوغارتم المقعر.

اذاً g هي لوغارتم المقعر، فان $f(x,\theta) = g(X-\theta)$ هـي (a Polya Frequency Function) مـن نوع 2 [انظر Lehmann , (1959,P.115].

اذا دققنا في المتباينة المتحققة في (3) عندما $\delta \neq 0$ من السهولة يمكن ان الـ MLE لـ θ هو وحيـد لاجل عينات من اي حجم. وهكذا هدفنا الذي اتم حول عدم وحدانية الـ $\hat{\theta}$ هو ضروري لكون $\log g$ يجب ان يكون محدب بشكل دقيق على بعض الفترة.

3. الامثلة Examples

في هذا المبحـث نحـضر مثـالين مخصـصين توضـيح نتيجـة المبحـث 2 نفـرض $h = \log g$، $f(x,\theta) = g(X-\theta)$ ، $\hat{\theta}$ هي المقدر MLE لـ θ مبنية على عينة ذات حجم 2. القيمتين الملاحظتين x_1, x_2 هما مكتوبة بالشكل $\bar{X} \pm \Delta$.

<u>مثال (1)</u>

افرض ان

$$g(y) = \left[\Pi(1+y^{2)}\right]^{-1}$$

فأن

$$h'''(y) = 2(y^2-1) / \left[(1+y^2)^2\right]$$

اذا $h''(y) \succ 0$

عندما $|y| \succ 1$. فانه يتبع ان $\hat{\theta}$ هي غير وحيدة طالما يكون $|X_1 - X_2| \succ 2$

هذه يمكن ايضاً ان تحقق مباشرة كما يأتي:
بما ان

$$h'(y)=-2y(1+y^2)^{-1}$$

تملك

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log L}{\partial \theta}=\frac{(\bar{X}+\Delta-\theta)}{\left[1+(\bar{X}+\Delta-\theta)^2\right]}+\frac{(\bar{X}-\Delta-\theta)}{\left[1+(\bar{X}+\Delta-\theta)^2\right]}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log L}{\partial \theta}=\frac{2(\bar{X}-\theta)\left[(\bar{X}-\theta)^2-\Delta^2+1\right]}{\left[1+(\bar{X}+\Delta-\theta)^2\right]\left[1+(\bar{X}-\Delta-\theta)^2\right]}$$

افرض ان $|\Delta| \succ 1$ فان معادلة الامكان يكون لها ثلاثة جذور هي:

$\theta=\bar{X}$, $\theta=\bar{X}\pm(\Delta^2-1)^{1/2}$، اكثر من ذلك عندما θ تزداد من $-\infty$ الى ∞ ، المشتقة السابقة هي على التعاقب موجبة، سالبة، موجبة، سالبة، انه يتبع ذلك ان

$$\hat{\theta}=\bar{X}\pm(\Delta^2-1)^2$$

كلما كانت $|\Delta| \succ 1$

بالطبع فان $\hat{\theta}=\bar{X} \quad if\,|\Delta| \le 1$

هذه مسألة صحيحة

[انظر (1977) 23 (b) on page 114 of Bicked and Doksum]

مثال (1)

هذا المثال يرينا ان $\hat{\theta}$ يمكن ان تكون غير وحيدة مع احتمالية 1

افرض ان $g(y)=c(1+|y|)^{-\alpha}$

حيث ان $\alpha \succ 1$ هي معرفه ثابتة وان c يمكن جعلها ثابتة فان

$$h''(y)=\alpha(1+|y|)^{-2} \succ 0\ ,\ \forall y \neq 0$$

ينتج من ذلك ان MLE هي وحيدة فقط اذا كانت $\Delta=0$ بما ان الحادث $x_1=x_2$ له احتمالية 0 ، الـ MLE هو غير وحيد مع احتمالية 1.

4. غير الوحدانية لـ MLE لعينات ذات احجام اختيارية

Nonuniqueness of the MLE for samples of Arbitrarysize

في المبحث 2، الحقيقة ان x_1, x_2 يقعان متماثلين مع $\bar{X}$ التي تستخدم بطريقة اساسية. لأجل هذه النتيجة يوجد بعض الصعوبة في توسيع هذه النتيجة، لذلك المبحث لعينات ذات حجوم اختيارية المناقشة يمكن ان تكون غير صحيحة. على اي حال لإثبات ان عدم وحدانية الـ MLE لعينات لاي حجم ≤ 2 . هذا التوسيع هو مخطط في هذا المبحث

افرض ان I تمثل مجموعة كل الاعداد الصحيحة، افرض ان $[g(i)\ ,\ ieI]$ هو توزيع على I بحيث ان

$$(a) \quad q(i) \succ 0 \ \ and \ \ q(i)=q(-i)\,for\,all\,i \in I\ ;$$

(b) g هي احادية مع منوال وحيد عند 0 وان

(c) اذا كانت $\eta=q(1)/q(0)$ فانه لبعض $N \ge 2$ يكون

$$\eta\, q(N+1)\, q(N-1) \succ |q(N)|^2 \qquad .....(4)$$

لكـي نـرى الـشرط c يكـون متحقـق، ضـع $q(1)=\eta\, q(0)$, $q(2)=q(3)=\xi\,\eta\, q(0)$ حيـث ان $1\succ\eta\succ\xi\succ 0$ فان (4) تحقق لـ $N=2$ نلاحظ انه في رؤية الشرط (b) المتباينة (4) لا تحقق لـ $N=0$ او $N=1$

افـرض ان $X_1, X_2, ..., X_n$ هـي مـشاهدات مـستقلة بحيـث ان $P_\theta(X_j=i)=q(i-\theta)$ لكـل $\theta\in I$, $i\in I$, $j=1,2,....,n$

افرض ان x_j هي قيمة مشاهدة لـ X_j. الشرط (b) يرينا ان MLE لـ θ هو وحيـد ويـساوي X_1 عندما $n=1$.

الآن افرض ان $n\geq 2$ ، افـرض ان n هـي عـدد فـردي وان $n=2m+1$ مـع $m\geq 1$. افـرض ان

$$X_j=a\ ,\ X_{m+j}=a+2N$$

لكل $j=1,2,...,m$ وان $X_{2m}=a+N$ وان

$$X_{2m+}=a+N$$

فأن $L(\theta/X)=\left[q(a-\theta)\,q(a+2N-\theta)\right]^m .q(a+N-\theta)$

اذأ لاجل $K\in I$

$$L(a+N+K/X)=\left[q(N+K)\,q(N-K)\right]^m .q(K)$$

وهكذا L هي متماثلة حد a + N اكثر من ذلك نرى الشروط $\eta\prec 1$ ، (4) لنحصل على

$$\begin{aligned} L(a+N\pm 1/X) &= \left[q(N+1)\,q(N-1)\right]^m .q(1) \\ &= \left[q(N+1)\,q(N-1)\right]^m .\,\eta\, q(0) \\ &\geq \left[q(N+1)\,q(N-1)\right]^m .\,\eta^m\, q(0) \\ &\succ \left[q(N)\,\right]^{2m} .q(0)=L(a+N/X) \end{aligned}$$

وهكذا فان $\hat\theta\neq a+N$ ، الـ MLE هـو ليس وحيد، وامكانية اختيار $\hat\theta$ لا تكون فترة متقطعة. نلاحظ ان الحادث

$$X_1=X_2=.....=X_m=a$$

$$X_{2m+1}=a+N\,, X_{m+1}=......=X_{2m}=a+2N$$

لها احتمالية موجبة. حساب حالة $n=2m$ هي متشابه وهنا تكون كافية وان يكون لها شكل ضـعيف لـ (4) حيث ان العامل η هو غائب في جهة اليسار.

Reference

1. Bickel Peter J. and Doksum, Kjell A. (1977) "Mathematical Statistical " san Framcisco, Holden – Day.

2. Hogg, Robert V., and Craig Alan T. (1978) " Introduction to Mathematical Statistical " (4 th ed.) New York Macmillan.

3. Hogg Robert V., and Tanis, Elliot A. (1983) " Probability and Statistical Inference " (2 sd ed.) Macmillan Co. New York.

4. Lehmann, E. L. (1959) " Testing Statistical Hypotheses " New York, Jone Wiley.

5. Lehmann, E. L. (1980) "Efficient Likelihood Estimators " The American Statisticion, 34, 233 – 235.

6. Mood, Alexander M. (1987) " Introduction to the Theory of Statistical " (3 rd ed.) Megraw Hill International Editions.