إيجاد الكفاءة النسبية المئوية لمعلمة الشكل لتوزيع ويبل

أ. د. ضوية سلمان أ. م. د. أنعام عبد الوهاب
كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة بغداد وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
م. م. احمد ذياب
كلية الإدارة والاقتصاد /جامعة بغداد

Abstract

The research leading to the estimator for the percent relative efficiency for shape parameter (B) from two parameter weibull distribution and estimator the absolute relative bias when (m) smallest ordered observation in a sample of size (n) from weibull distribution and compute the efficient estimator for parameter when to find the best range of Δ.

1- المقدمة

يعتبر توزيع ويبل احد التوزيعات المستمرة واحد نماذج الفشل الشائعة الاستخدام ولهذا التوزيع أهمية في حقل المعولية (Reliability) واختبار الحياة (life testing) والسيطرة النوعية (quality control)[4].

وقد اشتق توزيع ويبل من قبل تبيت فيشر (Tippett Fisher) عام 1928 كتوزيع ثالث تقريبي للقيم المتطرفة، وفي عام 1939 توصل العالم السويدي (waloddi weibull) [3] الى هذا التوزيع في تحليل قوة الكسر للأدوات ، وبعد تطور البحوث العلمية وبحوث الفضاء اصبح هذا التوزيع مرافقا لتلك التطورات فقد ساهم كثير من الباحثين في دراسة خصائص هذا التوزيع وبحث طرائق تقدير معلماته مثل معلمة الشكل (β) ومعلمة القياس (α) . يتضمن توزيع ويبل كل من التوزيع الاسي (Exponential Distribution) وتوزيع رالي (Rayleigh Distribution) كحالة خاصة.

2- هدف البحث

يهدف هذا البحث الى ايجاد الكفاءة النسبية المئوية لمعلمة الشكل لتوزيع ويبل ذي المعلمتين (α ، β) وكذلك حساب التحيز النسبي المطلق للمعلمة إضافة إلى ذلك حساب كفاءة التقدير من خلال ايجاد افضل مدى للـ Δ ولإحجام عينات مختلفة.

وعلى فرض لدينا $\chi_1, \chi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \chi_n$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع ويبل ذي المعلمتين وتمتلك دالة كثافة احتمالية هي:

$$f(\chi) = \beta \alpha^{-\beta} \chi^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad ; \quad \chi \succ 0 \quad , \quad \alpha \succ 0 \quad , \quad \beta \succ 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث ان

α : معلمة القياس

β : معلمة الشكل والتي تعتمد على توفر معلومات أولية عنها من المجال الذي يحتوي على (β_1 , β_2).

اما دالة الكثافة التجميعية لهذا التوزيع فهي

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad \text{.....(2)}$$

3- تقدير معلمة الشكل

بافتراض ان $\chi_1, \chi_2 \ldots\ldots \chi_n$ هي مشاهدات مرتبة بحجم m في عينة بحجـم n من توزيع ويبل فان [2]

$$E(\hat{\beta}^{-jp}) = \frac{1}{\beta^{jp}}\left(\frac{2}{h-2}\right)^{jp}\left(\frac{\Gamma((h/2)+jp)}{\Gamma(h/2)}\right) \qquad , j = 1,2 \qquad \text{.....(3)}$$

هو تقدير غير متحيز β كما وان

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(h/2)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-\beta t}{2}} t^{(h/2)^{-1}} \qquad , \quad t > 0 \qquad \text{.....(4)}$$

h: درجة الحرية وممكن ايجادها من Engelhardt [1]

ان المقدر الذي يملك اقل متوسط مربعات خطأ (MMSE) للـ B من بين كـل المقـدرات (cB) حيث C ثابت الذي يجعل مجموع مربعات الخطأ اقل ما يمكن هو المقدر

$$\hat{B}m = \frac{h-4}{t} \qquad \text{.....(5)}$$

اما التحيز النسبي المطلق للـ $\hat{\beta}_m$ Absolute Relative Bias

$$ARB(\hat{\beta}_m) = \left|\frac{2}{h-2}\right| \qquad \text{.....(6)}$$

وان متوسط مربعات لخطأ النسبي للـ $\hat{\beta}_m$ Relative Mean Squared Error هو

$$RMSE(\hat{\beta}_m) = \frac{2}{h-2} \qquad \text{.....(7)}$$

4- أسلوب المقدرات المقلصة Shrinkage Technique of estimation

بدأ البحث في تقدير معالم توزيع ويبل بطريقة المقدرات المقلصة منذ عام 1970، عند ازدياد اهتمام الباحثين في تحليل بيانات الفشل واجراء اختبارات الحياة للوحدات المنتخبة، وقد كان البحث عن الطرائق التي تعطي اقل متوسط مربعات خطأ ممكن هو ثمرة للجهود العلمية المتواصلة فـي حقل التقديرات، ولقد نوقش المقدر المقلص لمعلمة الشكل لتوزيع ويبل من قبل باحثين مختلفـين منهم Singh & Bhatkulikar (1978) و Pandey (1983) و Pandey & Upadhgay (1985,1968) و Singh & Shukla (2000).

على اعتبار ان تقدير $\beta^{*}_{p.q}$ للـ (β) في النموذج (1) يكون كالاتي

$$\beta^{*}_{p.q} = \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)\left(q + w\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2\hat{\beta}}\right)^{p}\right) \qquad \text{.....(8)}$$

حيث ان

q , p اعداد حقيقية وان $p\neq 0$ و $q>0$

w: متغير عشوائي

وعلى فرض ان w ثابت وباستخدام الصيغة (3) فان متوسط مربعات الخطأ (MSE) للـ $\hat{\beta}^{*}_{p.q}$ يكون كلاتي

$$MSE(\hat{\beta}^{*}_{p.q})=\beta^{2}\left[\begin{array}{l}(q\Delta-1)^{2}+w^{2}\Delta^{2(p+1)}\left(\frac{2}{h-2}\right)^{2p}\frac{\Gamma[(h/2)+2p]}{\Gamma(h/2)}\\ +(q\Delta-1)w\Delta^{(p+1)}\left(\frac{2}{h-2}\right)^{p}\frac{\Gamma[(h/2)+2p]}{\Gamma(h/2)}\end{array}\right] \quad \text{.....(9)}$$

$$\Delta=\frac{\beta_1+\beta_2}{2\beta} \qquad \text{..... (10)}$$

$$\hat{w}=\frac{-\left\{q\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)-\hat{\beta}\right\}\hat{\beta}^{p}}{\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)^{(p+1)}}w(p) \qquad \text{..... (11)}$$

$$w(p)=\left(\frac{h-2}{2}\right)^{p}\frac{\Gamma[(h/2)+p]}{\Gamma[(h/2)+2p]} \qquad \text{..... (12)}$$

وان $0<w(p)\leq 1$

وبابدال الصيغة (11) في (8) ينتج مقدرات Shrinkage للـ B كلاتي

$$\hat{\beta}_{p.q}=\left(\frac{h-2}{t}\right)w(p)+q\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\{1-w(p)\} \qquad \text{..... (13)}$$

عندما يكون w(p)=1 فأن تقدير Shrinkage $\hat{\beta}^{*}_{p.q}$ يكون تقدير غير متحيز $\hat{\beta}$ وغير ذلك يكون متحيز أي

$$Bias\{\hat{\beta}_{p.q}\}=\beta\{q\Delta-1\}[1-w(p)] \qquad \text{..... (14)}$$

اما التحيز النسبي المطلق (Absolute Relative Bias) فيكون كلاتي

$$ARB\{\hat{\beta}_{p.q}\}=|\{q\Delta-1\}[1-w(p)]| \qquad \text{..... (15)}$$

وان $ARB\{\hat{\beta}_{p.q}\}$ يساوي صفر عندما $\left(\Delta=q^{-1} \quad , \quad q=\Delta^{-1}\right)$

اما متوسط مربعات الخطأ $\hat{\beta}^{*}_{p.q}$ فيكون كلاتي

$$MSE\{\hat{\beta}_{p.q}\}=\hat{\beta}\left[\{q\Delta-1\}^{2}\{1-w(p)\}^{2}+\frac{2(w(p))^{2}}{(h-4)}\right] \qquad \text{..... (16)}$$

وان متوسط مربعات الخطأ النسبي Relative Mean Square error هو

$$RMSE\left\{\hat{\beta}_{p.q}\right\}=\left[\left\{q\Delta-1\right\}^2\left\{1-w(p)\right\}^2+\frac{2(w(p))^2}{(h-4)}\right] \quad \text{..... (17)}$$

وان اقل $RMSE\left\{\hat{\beta}_{p.q}\right\}$ هو عندما يكون ($q=\Delta^{-1}$, $\Delta=q^{-1}$)

5- إيجاد المدى Δ

ان متوسط مربعات الخطأ للـ $\overset{*}{\beta}_{p.q}$ لا يتجاوز اقل متوسط مربعات الخطأ لتقـدير $\hat{B}_m$ إذا كان

$$\left(1-\sqrt{G}\right)q^{-1}\prec\Delta\prec\left(1+\sqrt{G}\right)q^{-1} \quad \text{..... (18)}$$

حيث ان

$$G=\frac{2}{\left\{1-w(p)\right\}^2}\left[\frac{1}{(h-2)}-\frac{\left\{w(p)\right\}^2}{(h-4)}\right] \quad \text{..... (19)}$$

وكذلك التحيز النسبي المطلق للـ $\overset{*}{\beta}_{p.q}$ يكون اقل من التحيز النسبي المطلق للـ $\hat{B}_m$ اذا كان

$$\left\{1-\frac{2}{(h-2)(1-w(p))}\right\}q^{-1}\prec\Delta\prec\left\{1+\frac{2}{(h-2)(1-w(p))}\right\}q^{-1} \quad \text{..... (20)}$$

6- ايجاد افضل مدى للـ Δ

من خلال تقاطع مديات Δ في (18) و (20) فان افضل مدى للـ Δ يرمز له Δ_{Best} . فـي هذا المدى ليس فقط التقديرات تكون اقل تحيز من تقدير MMSE ولكن ايضا تكون اكثر كفـاءة من ذلك. ولاختيار افضل مدى للـ Δ توجد اربعة حالات ممكنة وهي

i) if

$$\left\{1-\frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}}\right\}\prec\left(1-\sqrt{G}\right)and\left\{1+\frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}}\right\}\prec\left(1+\sqrt{G}\right)$$

Then $\Delta_{Best}=\left[\left\{1-\sqrt{G}\right\}q^{-1},\left\{1+\frac{2}{(h-2)[1-w(p)]}\right\}q^{-1}\right]$

ii) if

$$\left\{1-\frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}}\right\}\prec\left(1-\sqrt{G}\right)and\left(1+\sqrt{G}\right)\prec\left\{1+\frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}}\right\}$$

Then Δ_{Best} **is the same as defined in (18)**

Iii) if $\left(1-\sqrt{G}\right)\prec\left\{1-\frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}}\right\}and\left(1+\sqrt{G}\right)\prec\left\{1+\frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}}\right\}$

Then $\Delta_{Best} = \left[\left\{ 1 - \frac{2}{(h-2)[1-w(p)]} \right\} q^{-1}, \left(1+\sqrt{G}\right) q^{-1} \right]$

iv) if $\left(1-\sqrt{G}\right) \prec \left\{ 1 - \frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}} \right\} and \left\{ 1 + \frac{2}{(h-2)\{1-w(p)\}} \right\} \prec \left(1+\sqrt{G}\right)$

Then Δ_{Best} **is the same as defined in (20)**

7- الكفاءة النسبية المئوية

ان حساب الكفاءة النسبية المئوية Percent Relative Efficiencies (PREs) للـ $\hat{\beta}_{p.q}$ وعلاقته بالـ $\hat{\beta}_m$ تحسب كما يلي

$$PRE\left\{\hat{\beta}_{p.q}, \hat{\beta}_m\right\} = \frac{2(h-4)}{(h-2)\left[(q\Delta-1)^2\{1-w(p)\}^2(h-4)+2\{w(p)\}^2\right]} \times 100 \quad \text{.... (21)}$$

8- تجربة افتراضية

لكي نحسب PREs($\hat{B}_{p.q}$) وعلاقته بالـ ($\hat{\beta}_m$) وكـذلك ARBs($\hat{\beta}_{p.q}$) نفتـرض n=20 وباخذ قيم مختلفة للـ m,q,p وايجاد $\Delta_1 = \beta_1/\beta$, $\Delta_2 = \beta_2/\beta$ او Δ وحساب h , W(p) والمدى Δ وافضل مدى Δ_{Best} وكذلك ($\hat{\beta}_m$) ARBs(وكما مبين في الجداول التالية.

جدول (1)

حساب($\hat{B}_{p.q}$) PREs(وعلاقته بالـ ($\hat{B}_m$) و($\hat{B}_{p.q}$) ARBs(و ($\hat{B}_m$) ARBs(

جدول (1)

حساب($\hat{B}_{p.q}$)PREs و علاقته بالـ ($\hat{B}_m$) و($\hat{B}_{p.q}$)ARBs و ($\hat{B}_m$)ARBs

$q\downarrow$	P=-2.5											
	$\Delta_1\downarrow$	$\Delta_2\downarrow$	$m\rightarrow$	6		8		10		12	
			$h\rightarrow$	10.8519		15.6740		20.8442		26.4026	
			$\Delta\downarrow w(p)$	0.022		0.191		0.342		0.458	
				PRE	ARB	PRE	ARB	PRE	ARB	PRE	ARB
0.15	0.1	0.2	0.15	24.718	0.956	23.157	0.791	24.821	0.643	27.373	0.529
	0.3	0.7	0.50	27.603	0.905	25.831	0.748	27.614	0.609	30.346	0.501
	0.3	1.7	1.00	32.688	0.831	30.528	0.688	32.486	0.559	35.484	0.461
	1.0	2.0	1.50	39.319	0.758	36.625	0.627	38.744	0.509	41.994	0.420
	1.5	2.5	2.00	48.194	0.685	44.736	0.566	46.953	0.461	50.383	0.379
	2.0	3.0	2.50	60.449	0.611	55.845	0.506	57.992	0.411	61.402	0.339
	2.5	3.5	3.00	78.051	0.538	71.617	0.445	73.267	0.362	76.176	0.298
	3.0	4.0	3.50	104.627	0.465	95.023	0.384	95.123	0.313	96.414	0.257
	3.5	4.5	4.00	147.501	0.391	131.801	0.324	127.623	0.263	124.692	0.217
	Range of $\Delta\rightarrow$			(3.428, 9.906)	(5.127, 8.207)	(3.583, 9.750)	(5.461, 7.872)	(3.589, 9.744)	(5.591, 7.742)	(3.574, 9.759)	(5.659, 7.675)
	$\Delta_{Best}\rightarrow$			(5.127,8.207)		(5.461,7.872)		(5.591,7.742)		(5.659,7.675)	
0.50	0.1	0.2	0.15	27.603	0.905	25.831	0.748	27.614	0.609	30.346	0.501
	0.3	0.7	0.50	41.984	0.734	39.066	0.607	41.228	0.494	44.550	0.407
	0.3	1.7	1.00	94.432	0.489	86.103	0.405	86.903	0.329	88.923	0.271
	1.0	2.0	1.50	377.060	0.245	310.175	0.202	259.191	0.165	220.989	0.136
	1.5	2.5	2.00	159929.7	0	2340.224	0	764.224	0	437.654	0
	2.0	3.0	2.50	377.060	0.245	310.175	0.202	259.191	0.165	220.989	0.136
	2.5	3.5	3.00	94.432	0.489	86.103	0.405	86.903	0.329	88.923	0.271
	3.0	4.0	3.50	41.984	0.734	39.066	0.607	41.228	0.494	44.550	0.407
	3.5	4.5	4.00	23.618	0.978	22.137	0.809	23.751	0.658	26.227	0.542
	Range of $\Delta\rightarrow$			(1.028, 2.972)	(1.538, 2.462)	(1.075, 2.925)	(1.638, 2.362)	(1.077, 2.923)	(1.677, 2.323)	(1.072, 2.928)	(1.698, 2.302)
	$\Delta_{Best}\rightarrow$			(1.538,2.462)		(1.638,2.362)		(1.677,2.323)		(1.698,2.302)	
0.75	0.1	0.2	0.15	29.985	0.868	28.033	0.718	29.904	0.584	32.769	0.481
	0.3	0.7	0.50	60.449	0.611	55.845	0.506	57.992	0.411	61.402	0.339
	0.3	1.7	1.00	377.060	0.245	310.175	0.202	259.191	0.165	220.989	0.136
	1.0	2.0	1.50	1497.648	0.122	887.721	0.101	513.894	0.082	351.499	0.068
	1.5	2.5	2.00	94.432	0.489	86.103	0.405	86.903	0.329	88.923	0.271
	2.0	3.0	2.50	30.847	0.856	28.829	0.708	30.729	0.576	33.639	0.474
	2.5	3.5	3.00	15.117	1.223	14.216	1.011	15.373	0.823	17.156	0.678
	3.0	4.0	3.50	8.945	1.589	8.433	1.315	9.172	1.069	10.316	0.881
	3.5	4.5	4.00	5.905	1.956	5.574	1.618	6.079	1.316	6.865	1.084
	Range of $\Delta\rightarrow$			(0.686, 1.981)	(1.025, 1.641)	(0.717, 1.950)	(1.092, 1.574)	(0.718, 1.949)	(1.118, 1.548)	(0.715, 1.952)	(1.132, 1.535)
	$\Delta_{Best}\rightarrow$			(1.025,1.641)		(1.092,1.574)		(1.118,1.548)		(1.132,1.535)	

0.90	0.1	0.2	0.15	31.564	0.846	29.492	0.699	31.415	0.569	34.360	0.469
	0.3	0.7	0.50	78.051	0.538	71.617	0.445	73.267	0.362	76.176	0.298
	0.3	1.7	1.00	2327.812	0.098	1143.146	0.081	582.594	0.066	378.309	0.054
	1.0	2.0	1.50	192.600	0.342	169.239	0.283	158.584	0.230	149.798	0.189
	1.5	2.5	2.00	36.901	0.782	34.405	0.647	36.474	0.526	39.644	0.434
	2.0	3.0	2.50	15.117	1.223	14.216	1.011	15.373	0.823	17.156	0.678
	2.5	3.5	3.00	8.173	1.663	7.707	1.375	8.389	1.119	9.445	0.921
	3.0	4.0	3.50	5.110	2.103	4.825	1.739	5.266	1.415	5.953	1.165
	3.5	4.5	4.00	3.494	2.543	3.301	2.103	3.609	1.711	4.089	1.409
	Range of $\Delta \rightarrow$			(0.571, 1.651)	(0.854, 1.368)	(0.597, 1.625)	(0.910, 1.312)	(0.598, 1.624)	(0.932, 1.290)	(0.596, 1.627)	(0.943, 1.279)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.854,1.368)		(0.910,1.312)		(0.932,1.290)		(0.943,1.279)	
ARB of MMSE Estimator $\rightarrow$				0.2259		0.1463		0.1061		0.0819	

جدول (2)

حساب($\hat{B}_{p.q}$)PREs وعلاقته بالـ ($\hat{B}_m$) و($\hat{B}_{p.q}$)ARBs و ($\hat{B}_m$)ARBs

	$\Delta_1 \downarrow$	$\Delta_2 \downarrow$	$m \rightarrow$	**6**		**8**		**10**		**12**	
			$h \rightarrow$	**10.8519**		**15.6740**		**20.8442**		**26.4026**	
			$\Delta \downarrow w(p)$	**0.7739**		**0.8537**		**0.8939**		**0.918**	
				PRE	**ARB**	**PRE**	**ARB**	**PRE**	**ARB**	**PRE**	**ARB**
0.15	0.1	0.2	0.15	101.017	0.221	100.655	0.143	100.474	0.104	100.366	0.080
	0.3	0.7	0.50	103.377	0.209	102.158	0.135	101.555	0.098	101.199	0.076
	0.3	1.7	1.00	106.699	0.192	104.233	0.124	103.033	0.090	102.329	0.069
	1.0	2.0	1.50	109.934	0.175	106.207	0.113	104.423	0.082	103.388	0.064
	1.5	2.5	2.00	113.045	0.158	108.065	0.102	105.719	0.074	104.367	0.057
	2.0	3.0	2.50	115.993	0.141	109.791	0.091	106.91	0.066	105.263	0.051
	2.5	3.5	3.00	118.739	0.124	111.367	0.080	107.989	0.058	106.069	0.045
	3.0	4.0	3.50	121.243	0.107	112.780	0.069	108.949	0.050	106.784	0.039
	3.5	4.5	4.00	123.466	0.090	114.015	0.059	109.781	0.042	107.402	0.033
	Range of $\Delta \rightarrow$			(2.E-06, 13.333)	(0.005, 13.338)	(-8.E-07, 13.333)	(0.002, 13.333)	(-8.E-07 13.333)	(-0.002, 13.335)	(2.E-06, 13.333)	(0.003, 13.329)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.005,13.338)		(0.002,13.333)		(-8.E-07,13.333)		(0.003,13.329)	
0.50	0.1	0.2	0.15	103.377	0.209	102.158	0.135	101.555	0.098	101.199	0.076
	0.3	0.7	0.50	110.986	0.169	106.840	0.109	104.866	0.079	103.723	0.062
	0.3	1.7	1.00	120.438	0.113	112.328	0.073	108.643	0.053	106.557	0.041
	1.0	2.0	1.50	126.923	0.057	115.901	0.037	111.042	0.027	108.332	0.021
	1.5	2.5	2.00	129.242	0	117.142	0	111.865	0	108.937	0
	2.0	3.0	2.50	126.923	0.057	115.905	0.037	111.042	0.027	108.332	0.021
	2.5	3.5	3.00	120.438	0.113	112.328	0.073	108.643	0.053	106.557	0.041
	3.0	4.0	3.50	110.986	0.169	106.840	0.109	104.866	0.079	103.723	0.062
	3.5	4.5	4.00	99.999	0.226	100	0.146	100	0.106	100	0.028
	Range of $\Delta \rightarrow$			(6.E-07, 4)	(0.001, 3.999)	(-2.E-07, 4)	(5.E-04 3.999)	(-2.E-07 4)	(-6E-04 4.001)	(5.E-07, 4)	(0.001, 3.999)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.001,3.999)		(5.E-04,3.999)		(-2.E-07,4)		(0.001,3.999)	

0.75	0.1	0.2	0.15	105.047	0.201	103.207	0.129	102.304	0.094	101.773	0.073
	0.3	0.7	0.50	115.993	0.141	109.791	0.091	106.91	0.066	105.263	0.051
	0.3	1.7	1.00	126.923	0.057	115.901	0.037	111.042	0.027	108.332	0.021
	1.0	2.0	1.50	128.655	0.028	116.829	0.018	111.658	0.013	108.786	0.010
	1.5	2.5	2.00	120.438	0.113	112.328	0.073	108.643	0.053	106.557	0.041
	2.0	3.0	2.50	105.599	0.198	103.552	0.128	102.549	0.093	101.961	0.072
	2.5	3.5	3.00	88.709	0.283	92.395	0.183	94.369	0.133	95.589	0.103
	3.0	4.0	3.50	72.928	0.367	80.639	0.238	85.178	0.172	88.137	0.133
	3.5	4.5	4.00	59.567	0.452	69.492	0.293	75.861	0.212	80.249	0.164
	Range of $\Delta \rightarrow$			(4.E-07, 2.667)	(0.0009, 2.666)	(-2.E-07, 2.667)	(3.E-04 2.666)	(-2.E-07 2.667)	(-4.E04 2.667)	(3.E-07, 2.667)	(7.E-04 2.666)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.0009,2.666)		(3.E-04,2.666)		(-2.E-07,2.667)		(7.E-04,2.666)	
0.90	0.1	0.2	0.15	106.041	0.196	103.825	0.127	102.744	0.092	102.109	0.071
	0.3	0.7	0.50	118.739	0.124	111.367	0.080	107.989	0.058	106.069	0.045
	0.3	1.7	1.00	128.866	0.023	116.942	0.015	111.733	0.011	108.840	0.008
	1.0	2.0	1.50	124.773	0.079	114.733	0.051	110.263	0.037	107.758	0.029
	1.5	2.5	2.00	108.867	0.181	105.561	0.117	103.97	0.085	103.043	0.066
	2.0	3.0	2.50	88.709	0.283	92.395	0.183	94.369	0.133	95.589	0.103
	2.5	3.5	3.00	70.046	0.384	78.335	0.249	83.301	0.180	86.576	0.139
	3.0	4.0	3.50	54.956	0.486	65.355	0.315	72.243	0.228	77.089	0.176
	3.5	4.5	4.00	43.417	0.588	54.262	0.380	62.075	0.276	67.909	0.213
	Range of $\Delta \rightarrow$			(3.E-07, 2.222)	(0.0008, 2.221)	(-1.E-07, 2.222)	(3.E-04 2.222)	(-1.E-07, 2.222)	(-3.E04 2.223)	(2.E-07, 2.222)	(6.E-04 2.222)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.0008,2.221)		(3.E-04,2.222)		(-1.E-07,2.222)		(6.E-04,2.222)	
ARB of MMSE Estimator $\rightarrow$				0.2259		0.1463		0.1061		0.0819	

جدول (3)

حساب($\hat{B}_{p.q}$)PREs و علاقته بالـ ($\hat{B}_m$) و($\hat{B}_{p.q}$)ARBs و ($\hat{B}_m$)ARBs

$q\downarrow$	P=1											
	$\Delta_1\downarrow$	$\Delta_2\downarrow$	$m\rightarrow$	6		8		10		12	
			$h\rightarrow$	10.8519		15.6740		20.8442		26.4026	
			$\Delta\downarrow w(p)$	0.6888		0.7737		0.8251		0.8779	
				PRE	ARB	PRE	ARB	PRE	ARB	PRE	ARB
0.15	0.1	0.2	0.15	97.800	0.304	96.551	0.221	96.429	0.171	98.685	0.119
	0.3	0.7	0.50	102.074	0.288	99.925	0.209	99.183	0.162	100.487	0.113
	0.3	1.7	1.00	108.387	0.265	104.807	0.192	103.107	0.149	102.993	0.104
	1.0	2.0	1.50	114.893	0.241	109.713	0.175	106.982	0.136	105.399	0.095
	1.5	2.5	2.00	121.512	0.218	114.583	0.158	110.760	0.122	107.684	0.085
	2.0	3.0	2.50	128.145	0.195	119.341	0.141	114.389	0.109	109.821	0.076
	2.5	3.5	3.00	134.663	0.171	123.903	0.124	117.812	0.096	111.789	0.067
	3.0	4.0	3.50	140.916	0.148	128.178	0.107	120.969	0.083	113.565	0.058
	3.5	4.5	4.00	146.733	0.124	132.068	0.091	123.802	0.069	115.125	0.049
	Range of $\Delta\rightarrow$			(0.331, 13.002)	(1.826, 11.507)	(0.508, 12.826)	(2.358, 10.975)	(0.604, 12.729)	(2.621, 10.712)	(0.405, 12.929)	(2.192, 11.142)
	$\Delta_{Best}\rightarrow$			(1.826,11.507)		(2.358,10.975)		(2.621,10.712)		(2.162,11.142)	
0.50	0.1	0.2	0.15	102.074	0.288	99.925	0.209	99.183	0.162	100.487	0.113
	0.3	0.7	0.50	117.091	0.233	111.344	0.169	108.255	0.131	106.176	0.092
	0.3	1.7	1.00	138.872	0.156	126.791	0.113	119.950	0.087	112.996	0.061
	1.0	2.0	1.50	156.318	0.078	138.303	0.057	128.265	0.044	117.525	0.031
	1.5	2.5	2.00	163.151	0	142.619	0	131.298	0	119.117	0
	2.0	3.0	2.50	156.318	0.078	138.303	0.057	128.265	0.044	117.525	0.031
	2.5	3.5	3.00	138.872	0.156	126.791	0.113	119.950	0.087	112.996	0.061
	3.0	4.0	3.50	117.091	0.233	111.344	0.169	108.255	0.131	106.176	0.092
	3.5	4.5	4.00	96.009	0.311	95.120	0.226	95.252	0.175	97.903	0.122
	Range of $\Delta\rightarrow$			(0.099, 3.901)	(0.548, 3.452)	(0.152, 3.848)	(0.707, 3.293)	(0.181, 3.819)	(0.786, 3.214)	(0.121, 3.879)	(0.658, 3.343)
	$\Delta_{Best}\rightarrow$			(0.548,3.452)		(0.707,3.293)		(0.786,3.214)		(0.658,3.342)	
0.75	0.1	0.2	0.15	105.203	0.276	102.359	0.201	101.149	0.155	101.751	0.108
	0.3	0.7	0.50	128.145	0.195	119.341	0.141	114.389	0.109	109.821	0.076
	0.3	1.7	1.00	156.318	0.078	138.303	0.057	128.265	0.044	117.525	0.031
	1.0	2.0	1.50	161.387	0.039	141.515	0.028	130.527	0.022	118.715	0.015
	1.5	2.5	2.00	138.872	0.156	126.791	0.113	119.950	0.087	112.996	0.061
	2.0	3.0	2.50	106.258	0.272	103.174	0.198	101.803	0.153	102.168	0.107
	2.5	3.5	3.00	77.962	0.389	80.112	0.283	82.510	0.219	88.989	0.153
	3.0	4.0	3.50	57.313	0.506	61.510	0.368	65.672	0.284	75.766	0.198
	3.5	4.5	4.00	42.965	0.622	47.580	0.453	52.233	0.349	63.811	0.244
	Range of $\Delta\rightarrow$			(0.066, 2.600)	(0.365, 2.301)	(0.102, 2.565)	(0.472, 2.195)	(0.121, 2.546)	(0.524, 2.142)	(0.081, 2.586)	(0.438, 2.228)
	$\Delta_{Best}\rightarrow$			(0.365,2.301)		(0.472,2.195)		(0.524,2.142)		(0.438,2.228)	

0.90	0.1	0.2	0.15	107.107	0.269	103.827	0.196	102.325	0.151	102.499	0.106
	0.3	0.7	0.50	134.663	171	123.903	0.124	117.812	0.096	111.789	0.067
	0.3	1.7	1.00	162.017	0.031	141.911	0.023	130.803	0.017	118.859	0.012
	1.0	2.0	1.50	150.277	0.109	134.398	0.079	125.481	0.061	116.037	0.043
	1.5	2.5	2.00	112.707	0.249	108.079	0.181	105.699	0.139	104.610	0.098
	2.0	3.0	2.50	77.962	0.389	80.112	0.283	82.510	0.219	88.989	0.153
	2.5	3.5	3.00	54.005	0.529	58.375	0.385	62.712	0.297	73.249	0.208
	3.0	4.0	3.50	38.546	0.669	43.109	0.487	47.757	0.376	59.511	0.263
	3.5	4.5	4.00	28.486	0.809	32.594	0.588	36.900	0.455	48.329	0.317
	Range of $\Delta \rightarrow$			(0.055, 2.167)	(0.304, 1.918)	(0.085, 2.138)	(0.393, 1.829)	(0.101, 2.122)	(0.437, 1.785)	(0.067, 2.155)	(0.365, 1.857)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.304,1.918)		(0.393,1.829)		(0.437,1.785)		(0.365,1.857)	
ARB of MMSE Estimator $\rightarrow$				0.2259		0.1463		0.1061		0.0819	

جدول (4)

حساب($\hat{B}_{p.q}$)PREs و علاقته بالـ ($\hat{B}_m$) و($\hat{B}_{p.q}$)ARBs و ($\hat{B}_m$)ARBs

$q \downarrow$	**P=2.5**										
	$\Delta_1 \downarrow$	$\Delta_2 \downarrow$	$m \rightarrow$	**6**		**8**		**10**		**12**	
			$h \rightarrow$	**10.8519**		**15.6740**		**20.8442**		**26.4026**	
			$\Delta \downarrow w(p)$	**0.187**		**0.3**		**0.395**		**0.475**	
				PRE	**ARB**	**PRE**	**ARB**	**PRE**	**ARB**	**PRE**	**ARB**
0.15	0.1	0.2	0.15	35.206	0.795	30.244	0.684	28.819	0.591	28.909	0.513
	0.3	0.7	0.50	39.243	0.752	33.649	0.648	31.996	0.559	32.018	0.486
	0.3	1.7	1.00	46.322	0.691	39.590	0.595	37.506	0.514	37.376	0.446
	1.0	2.0	1.50	55.486	0.630	47.223	0.543	44.525	0.469	44.137	0.407
	1.5	2.5	2.00	67.630	0.569	57.242	0.49	53.636	0.424	52.809	0.368
	2.0	3.0	2.50	84.181	0.508	70.718	0.438	65.716	0.378	64.126	0.328
	2.5	3.5	3.00	107.514	0.447	89.379	0.385	82.116	0.333	79.172	0.289
	3.0	4.0	3.50	141.799	0.386	116.105	0.333	104.968	0.287	99.548	0.249
	3.5	4.5	4.00	194.839	0.325	155.899	0.28	137.675	0.242	127.576	0.21
	Range of $\Delta \rightarrow$			(2.858, 10.475)	(4.814, 8.519)	(3.222, 10.112)	(5.274, 8.059)	(3.405, 9.928)	(5.497, 7.836)	(3.509, 9.824)	(5.626, 7.707)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(4.814,8.519)		(5.274,8.059)		(5.497,7.836)		(5.626,7.707)	
0.50	0.1	0.2	0.15	39.243	0.752	33.649	0.648	31.996	0.559	32.018	0.486
	0.3	0.7	0.50	59.146	0.609	50.255	0.525	47.293	0.454	46.785	0.394
	0.3	1.7	1.00	128.778	0.407	106.05	0.35	46.457	0.303	92.038	0.263
	1.0	2.0	1.50	438.569	0.232	317.66	0.175	256.347	0.151	219.320	0.131
	1.5	2.5	2.00	2213.56	0	948.597	0	572.899	0	406.888	0
	2.0	3.0	2.50	438.569	0.203	317.66	0.175	256.347	0.151	219.320	0.131
	2.5	3.5	3.00	128.778	0.407	106.05	0.35	96.457	0.303	92.038	0.263
	3.0	4.0	3.50	59.146	0.609	50.255	0.525	47.293	0.454	46.785	0.394
	3.5	4.5	4.00	33.663	0.813	28.939	0.7	27.599	0.605	27.710	0.525
	Range of $\Delta \rightarrow$			(0.857, 3.143)	(1.444, 2.556)	(0.967, 3.033)	(1.582, 2.418)	(1.022, 2.978)	(1.649, 2.351)	(1.053, 2.947)	(1.688, 2.312)

	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(1.444,2.556)		(1.582,2.418)		(1.649,2.351)		(1.688,2.312)	
0.75	0.1	0.2	0.15	42.564	0.722	36.441	0.621	34.591	0.537	34.547	0.466
	0.3	0.7	0.50	84.181	0.508	70.718	0.438	65.716	0.378	64.126	0.328
	0.3	1.7	1.00	438.569	0.203	317.66	0.175	256.347	0.151	219.320	0.131
	1.0	2.0	1.50	1100.283	0.102	633.856	0.088	437.758	0.076	335.217	0.066
	1.5	2.5	2.00	128.778	0.407	106.05	0.35	96.457	0.303	92.038	0.263
	2.0	3.0	2.50	43.765	0.711	37.448	0.613	35.524	0.529	35.454	0.459
	2.5	3.5	3.00	21.663	1.016	18.727	0.875	17.975	0.756	18.180	0.656
	3.0	4.0	3.50	12.869	1.321	11.171	1.138	10.774	0.983	10.958	0.853
	3.5	4.5	4.00	8.513	1.626	7.404	1.4	7.158	1.21	7.300	1.05
	Range of $\Delta \rightarrow$			(0.572, 2.095)	(0.963, 1.704)	(0.644, 2.022)	(1.055, 1.612)	(0.681, 1.986)	(1.099, 1.567)	(0.702, 1.965)	(1.125, 1.541)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.963,1.704)		(1.055,1.612)		(1.099,1.567)		(1.125,1.541)	
0.90	0.1	0.2	0.15	44.762	0.703	38.284	0.606	36.298	0.523	36.205	0.454
	0.3	0.7	0.50	107.514	0.447	89.379	0.385	82.116	0.333	79.172	0.289
	0.3	1.7	1.00	1343.54	0.081	719.838	0.070	478.382	0.061	357.913	0.053
	1.0	2.0	1.50	247.807	0.285	193.87	0.245	167.499	0.212	152.037	0.184
	1.5	2.5	2.00	52.153	0.650	44.454	0.559	41.986	0.484	41.700	0.42
	2.0	3.0	2.50	21.663	1.016	18.727	0.875	17.975	0.756	18.180	0.656
	2.5	3.5	3.00	11.765	1.382	10.217	1.19	9.861	1.029	10.035	0.892
	3.0	4.0	3.50	7.370	1.748	6.414	1.505	6.205	1.301	6.333	1.129
	3.5	4.5	4.00	5.045	2.114	4.395	1.82	4.258	1.573	4.352	1.365
	Range of $\Delta \rightarrow$			(0.473, 1.746)	(0.802, 1.419)	(0.537, 1.685)	(0.879, 1.343)	(0.568, 1.655)	(0.916, 1.306)	(0.585, 1.637)	(0.938, 1.285)
	$\Delta_{Best} \rightarrow$			(0.802,1.419)		(0.879,1.343)		(0.916,1.306)		(0.938,1.285)	
ARB of MMSE Estimator $\rightarrow$				0.2259		0.1463		0.1061		0.0819	

الاستنتاجات:-

1- الكفاءة النسبية المئوية لتقدير Shrinkage تكون متزايدة عندما $\Delta = q^{-1}$ ، حيث يصل الى اعلى نقطة ثم يبدأ يتناقص.
2- المدى Δ يكون متزايد لكل قيم n, p, q
3- التحيز النسبي المطلق يكون متناقص عندما $\Delta = q^{-1}$ والتقدير يصبح غير متحيز عند تلك النقطة ثم يتزايد بعد ذلك.
4- التحيز النسبي المطلق لتقدير افل متوسط مربعات الخطأ يتناقص مع زيادة m.

10- المصادر:-

1- Engelhardt, M. (1975): On Simple Estimation of the Parameters of the Weibull or Extreme-value distribution, Technometrics,17,369-374.
2- M. Khoshnevisan, S. Saxena, H. P. Singh, S. Singh, F. Smarandache. (2002): Estimation of Weibull Shape Parameter by Shrinkage towards an Interval under Failure Censored Sampling, American Research Press.
3-Weibull, W. (1939): The Phenomenon of Rupture in Solids, Ingenior Vetenskaps Akademiens, Handlingar,153,2.
4-weibull, w. (1951): A statistical distribution functions of wide Applicability, Journal of Applied Mechanics, 18, 293-297.