مقارنة طرائق تقدير معلمات دالة الشدة لعمليات بواسون غير المتجانسة

Comparison of Parameters Estimation Methods For the Intensity Function of Non Homogeneous Poisson Processes

أ . م. د. خالد ضاري عباس الطائي   م. م. جاسم حسن لازم
جامعة بغداد - كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

1- **المستخلص**

تتناول هذا البحث تقدير معلمات دالة الشدة العائدة لعمليات بواسون غير المتجانسة، ويهدف البحث في تقدير معلمات هذه الدالة من خلال ثلاثة طرائق هي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم وطريقة التقلص وذلك باستخدام أسلوب المحاكاة .

وللوصول إلى أفضل طريقة تقدير تم الاعتماد على عدة قيم أفتراضية لمعلمات دالة الشدة إذ استُخدم لهذا الغرض حجوم العينات (25,14 ,50 ,100)، وظهرت نتائج التقدير إن تقدير طريقة التقلص هو أفضل من تقدير طريقتي الإمكان الأعظم والعزوم إذ حظي هذا التقدير بأقل متوسط مربعات الخطأ وللعينات أعلاه .

Abstract

This research deals with parameters estimation methods for the intensity function of non homogeneous poisson processes , it aims to estimate parameters of this function throughout three methods which are maximum likelihood method , moment method and shurnkage method using simulation method.

In order to achive the best method, several assumed values for parameters of intensity function have been adopted using sample size of (14, 25, 50, 100) .Results of estimation showed that the estimation over the estimation method , of maximum likelihood and moment .

This estimation gain the least mean of squares error for the above samples .

2- المقدمة

عمليات بواسون غير المتجانسة من المواضيع المهمة التي أصبحت ذات شـأن فـي التطـور العلمي والتقدم التكنولوجي ولاسيما في مجال استخدام الآلة وكفأتها كما أنـــها أصبحت مهمـة فـي معرفة كفاءة الخدمة المقدمة على المستوى الخاص والعام .

وعمليات بواسون غير المتجانسة بشكلها المبسط هي عمليات عامة لعملية بواسون الاعتيادية، إذ أن الحوادث تحدث عشوائيا بالزمن t بمعدل λ من الحوادث لكل وحدة مـن وحدات الـزمن t. إذ أنها تكون مناسبة كنموذج لسلسلة من الحوادث التي تحدث عشوائيـا على طوال فتـرة معينـة مـن الزمن في أسلوب غير مستقر.

وتحظى عمليات بواسون غير المتجانسة بأهمية كبيرة في المجالات التطبيقية، ومن أهم هـذه المجالات، أولاً نظرية الانتظار أو نموذج عدد الواصلين لخـط الانتـظار كعـدد السيارات الواقفة على محطة تعبئة البنزين أو عدد السيارات المعطلة الموجودة في ورشـــة لتـصليح الـسيارات أو عـدد الزبائن الموجودين في محل للحلاقة وما إلى ذلك من الأمثلـــة الكثيرة، وثانيا نظريـة المعوليـة أو نموذج لأوقات الفشل في الأنظمة القابلة للإصلاح والتي تعني إن النظام الذي يحدث فيه فـشل فأنـه يمكن إعادة النظام إلى العمل بإصلاح بعـض مركباته دون الحاجة إلى إبدالها ومن أمثلة ذلك نظـام السيارة وهو نظام قابل للإصلاح فـي حالة حدوث فشل في إحدى مركبات السيارة مثل مشغل السيارة (جوزة المفتاح) يمكن أن يعاد إصلاحه دون الحاجة إلى تبديل كل نظـام التـشغيل الـسيارة، وهنـاك تطبيقات واسـعة لأنظمة القابلة للإصلاح وخاصة فيما يتعلق بأنظمة مراقبة عمل المحركات السيارات أو الطائرة أو أنظمة الحاسوب أو أنظمة الاتصالات...الخ .

3- هدف البحث

يهدف البحث إلى تقدير معلمات دالة الشدة λ(t) لعمليات بواسون غيـر المتجانـسة بطرائـق مختلفة هي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم وطريقة التقلص والمقارنة بينهن بغية معرفة أفضل طريقـة لتقـدير هذه المعلمات .

4- الجانب النظري

تناول هذا المبحث بعض المفاهيم الاساسية في العملية القابلة للعد اضافة الى تعريف عمليـات بواسون غير المتجانسة وتم التطرق الى خصائص هذة العمليات كما تم عـرض دالـة الـشدة لهـذة العمليات واخيراً تم تناول طرائق التقدير المستخدمة في البحث واشتقاقات هنا نجدر الاشـارة هنـا ان جزء من الاشتقاقات تم اشتقاقها من قبل الباحث كما العلاقات 11,10

4-1 دالة الشدة [5] Intensity Function

وتعرف دالة الشدة لنقطة العملية كالأتي :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N[t, t+\Delta t] \geq 1)}{\Delta t} \quad \text{---------- (1)}$$

حيث ان :

λ(t) = معدل عدد الحوادث (عدد الواصلين، عدد حالات الفشل) خلال الزمن t .

t = الزمن

أي إن دالة الشدة هي الاحتمال غير الشرطي للحدث في فترة صغيرة مقسومة من طول فترة معينة

4-2 عمليات بواسون الغير متجانسة

Non homogeneous poisson processes

وقبل التطرق الى تعريف عمليات بواسون غير المتجانسة لا بد لنا من التعرض الى التعريف التالي :

تعريف Definition [6]

الدالة f (.) يقال لها بأنها o(h) إذا كانت تحقق الشرط التالي:

$$Lim_{h\to 0}\ \frac{f(h)}{h}=0$$

لقد اتفق الباحثون على تعريف عمليات بواسون غير المتجانسة بالتعريف الآتي:

التعريف Definition [7 , 3]

عمليات العد $\{\ N(t)\ ,\ t\geq 0\ \}$ يقال لها بأنها عمليات بواسون غير المتجانسة بدالة الشدة $\lambda(t)$ ، $t\geq 0$ إذا حققت الشروط التالية :

1- $N(0)=0$ أي عدد الحوادث بالزمن صفر ($t=0$)

2- عمليات العد $\{\ N(t)\ ,\ t\geq 0\ \}$ أي عدد الحوادث بالزمن t لها زيادات مستقلة ولكنها غير مستقرة .

3- $p\{\ N(t+h)-\ N(t)=1\ \}=\ \lambda(t)h+o(h)$

4- $p\{\ N(t+h)-N(t)\ \geq\ 2\ \}=\ o(h)$

4-3 خصائص عملية بواسون غير المتجانسة [5]

Properties of Non Homogeneous Poisson Process

يمكننا ان نلخص الخصائص التي بها عملية بواسون غيرالمتجانسة بما ياتي :

1- استقلالية العدد Independent Of The Number

إذا كان لدينا عملية بواسون غير المتجانسة ضمن الفترة $(\ t\ ,\ 0\ )$ وكان عدد الحوادث خلال الفترة نفسها هو $N(t)=n$, لذا فان لحظة حصولنا على n من الحوادث تكون ذات توزيع مستقل ضمن الفترة $(0\ ,\ t)$ بدالة شدة $\lambda(t)\ /\ \Lambda(t)$.

2- المركّبة Superposition

مركبة لاثنين أو أكثر من عملية بواسون غير المتجانسة بدوال شدة $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$,........ هي أيضا عملية بواسون غير المتجانسة وهذا يعني:

$$\lambda(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+..---------$$

3- الاختيار العشوائي Random Selection

إذا كان لدينا عملية غير متجانسة بدالة شدة $\lambda(t)$ لذا فان اختيارنا لأي حدث يكون اختيار عشوائي وبصورة مستقلة عن بقية الحوادث وباحتمال $p(t)$ والذي يعتمد على الزمن لذلك يكون ذات دالة شدة $\lambda(t)\ p(t)$.

4 - الانقسام العشوائي Random Split

إذا كانت عملية بواسون غير المتجانسة بدالة شدة $\lambda(t)$ هـي منقـسمة عـشوائيا لعمليتـين جزئيتين باحتمالات $p_1(t)$ ، $p_2(t)$ إذاً $p_1(t)+p_2(t)=1$
لذا فان نتائج العمليات الجزئية هي عمليات بواسون غير متجانسـة مستقلـة وبدوال شدة $p_1(t)$ $\lambda(t)$ ، $p_2(t)\,\lambda(t)$.

3 -4- دالة الشدة موضوع البحث لعمليات بواسون غير المتجانسة [5]

هنالك دوال عديدة للشدة لهذه العمليات ولعل من أهمها الدالة موضوع البحث التالية ولأن هذه الدالة تمتاز بتطبيقات واسعة لهذه العمليات تم اختيارها لموضو

$$\lambda(t)=\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \text{-----------------(2)}$$

حيث ان :

إذ إن $\beta\ ,\ \theta\ >\ 0$

β : تمثل معلمة الشكل

θ : تمثل معلمة القياس

4-4 طرائق التقدير Methods Of Estimation

تم اختبار ثلاثة طرائق للتقدير هي طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة التقاص وقد قام الباحث باشتقاق الصيغ التقديرية لمعلمتي الشكل والقياس بطرائق التقدير المذكورة اعلاه لدالة الشدة المختارة في البحث .

-1- طريقة تقدير الإمكان الأعظم [2]

Method of Maximum likelihood Estimation

تـعد هـذه الطريقة ذات خصـــائص جـــيدة منـها خاصـــية الثبـــات ويمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة على انه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان الأعظم للمشاهدات فـي نهايتهـا العظمى .

لتكن $(\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots\ldots,x_n\ )$ عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمـع تتـوزع مفرداتـه بحسب دالة الشدة الاحتمالية لعمليات بواسون غير المتجانسة بدالة توزيع ذي معلمتين $(\theta\ ,\ \beta)$ فأن دالة الشدة المشتركة لأوقات الحدث $(\ t_1\ ,\ t_2\ ,\ldots,\ t_n)$ هي

$$f_n(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)=\prod_{I=1}^{n}\lambda(t_I)\exp[-\int_0^t\lambda(u)du] \text{ ----------- (3)}$$

وكما هو معلوم ان دالة الشدة المعتمدة في بحثنا هذا هي

$$\lambda(t)=\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)\beta-1$$

ومن الجدير بالذكر إن دالة الشدة التراكمية $\Lambda(t)$ تساوي

$$\Lambda(t)=\left(\frac{t}{\theta}\right)\beta$$

وعند التعويض عن $\lambda(t)$ في دالة الشدة المشتركة لأزمنة الحدث($t_1, t_2, \ldots, t_n$) ينتج:-

$$f_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{I=1}^{n} (\frac{\beta}{\theta})(\frac{t}{\theta})^{\beta-1} \exp[-\frac{t^{\beta}}{\theta^{\beta}}]$$

$$= \frac{\beta^n}{\theta^n}(\frac{t_1}{\theta})^{\beta-1}(\frac{t_2}{\theta})^{\beta-2} \ldots\ldots (\frac{t_n}{\theta})^{\beta-1} \exp[-\frac{\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta}}{\theta^{\beta}}]$$

وبأخذ اللوغارتيم الطرفين في المعادلة أعلاه نحصل

$$Lnf_n(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) = Ln(\frac{\beta^n}{\theta^n}) + (\beta-1)Ln(\frac{t_1}{\theta}) + \ldots\ldots + (\beta-1)Ln(\frac{t_n}{\theta}) - \frac{\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta}}{\theta^{\beta}}$$

$$\frac{d \mathrm{Ln\, f_n}(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{I=1}^{n} Ln(\frac{t_I}{\theta}) - \frac{\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta} Lnt_I - (Ln\theta)\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta}}{\theta^{\beta}}$$

وبعد التبسيط حصلنا على الصيغة آلاتية

$$\beta^{\wedge} = \frac{n\theta^{\wedge^{\beta^{\wedge}}}}{\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta^{\wedge}} Ln(t_I) - (Ln\theta^{\wedge})\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta^{\wedge}} - \theta^{\wedge^{\beta^{\wedge}}} (\sum_{I} Ln(\frac{t_I}{\theta^{\wedge}}))} \quad \text{------------(4)}$$

ونشتق $Ln\, f_n(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)$ بالنسبة إلى θ

$$\frac{d \mathrm{Ln\, f_n}(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{n(\beta-1)}{\theta} + \frac{\beta \sum_{I=1}^{n} t_{I=1}^{\beta}}{\theta^{\beta+1}}$$

وبمساواة المعادلة للصفروبالتبسيط حصلنا على الصيغة التالية

$$\theta^{\wedge} = \frac{n\theta^{\beta+1}}{\beta^{\wedge}\sum_{I=1}^{n} t_I^{\beta^{\wedge}} - n\theta^{\wedge^{\beta^{\wedge}}}(\beta^{\wedge}-1)} \quad \text{---------------------(5)}$$

2 - طريقة تقدير العزوم Method Of Moment Estimation

تعد طريقة العزوم من طرائق التـقدير التقلـيدية الشائـعة الاستـخدام وذلك لسهولتها وتعتمد على مساواة عزم المجتمع المقدر(μ_i) مع عـزم العينة (m_r) .

إن العزوم عبارة عن إحصاءات، وهي دوال في العينة المـشاهدة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، لـذلك من الممكن استخدامها لتقدير المعلمات $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n)$ بواسطة مجموعة المعادلات الآتية :

$$m_j' = \mu_j'(\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n)$$

إذ إن

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

يمكن الحصول على تقدير لمعلمتي دالة الشدة لعمليات بواسون غيـــر المتجانـسة بطريقـة العزوم حسب الأسلوب الآتي:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\exp[-(\frac{t}{\theta})^{\beta}][(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^{x}}{x!} \quad \text{--------------------- (6)}$$

وبعد التبسيط فأن النتيجة هي :

$$E(x) = (\frac{t}{\theta})^{\beta}$$

وبما أن عزم المجتمع الأول يساوي

$$\mu_1 = (\frac{t}{\theta})^{\beta}$$

وبما أن عزم المجتمع الأول = متوسط العينة الأول وعليه فأن

$$(\frac{t_I}{\theta})^{\beta} = EX$$

$$(\frac{t_I}{\theta})^{\beta} = \frac{\sum_{I=1}^{n} X_I}{n}$$

وبما إن $X = t$

$$\frac{t_I^{\beta}}{\theta^{\beta}} = \frac{\sum_{I=1}^{n} t_I}{n}$$

$$n t_I^{\beta} = \theta^{\beta} \sum_{I=1}^{n} t_I$$

$$\theta^{\beta} = \frac{n t_I^{\beta}}{\sum_{I=1}^{n} t_I}$$

$$\hat{\theta} = [\frac{n t_I^{\hat{\beta}}}{\sum_{I=1}^{n} t_I}]^{\overline{\hat{\beta}}} ------(7)$$

ولاستخراج العزم الثاني لابد من استخراج EX^2 على وفق الصيغة التالية :

$$EX^2 = EX(X-1) + EX$$

$$EX(X-1) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\exp[-(\frac{t}{\theta})^{\beta}][(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^{x+2-2}}{x(x-1)(x-2)!}$$

$$= \exp[-(\frac{t}{\theta})^{\beta}][(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{[(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$= [(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^2$$

وبما إن

$$EX^2 = E X(X-1) + EX$$

$$= [(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^2 + [(\frac{t}{\theta})^{\beta}]$$

وبما أن
عزم المجتمع الثاني = متوسط العينة الثاني فأن

$$[(\frac{t}{\theta})^{\beta}]^2 + (\frac{t}{\theta})^{\beta} = \frac{\sum_{I=1}^{n} t_I^2}{n}$$

وبالتبسيط حصلنا على الصيغة الآتية

$$\hat{\beta} = \frac{Log\left[\dfrac{nt^{2\beta}}{\hat{\theta}^{\hat{\beta}} \sum_{I=1}^{n} t_{I-n} t^{\hat{\beta}}}\right]}{Log\,\hat{\theta}} ---------(8)$$

3 - طريقة التقلص Shurnkage Method [1]

إن دالة التقلص تعني مقدار ثقة الباحث بالمعلومات المسبقة، ولعدم وجود قاعدة موحدة لاختيار قيمة k مما حدا كل باحث أن يختارها على وفق قواعد يعتقد أنها كافية، إن استخدام المعلومات المسبقة α_0 مثلما ورد في الآتي الذي عرف من قبل الباحث Thompson :

$$\hat{\alpha}_{sh} = k\hat{\alpha} + (1-k)\alpha_0 --------(9)$$

إذ إن :

α : هو مقدر أولي

α_0 : المعلومات المسبقة حول المعلمة α

وبما إن k قيمة ثابتة وتقع بين الصفر والواحد ، لذا حاول الباحث اشتقاق صيغةلقيمة k التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر α_{sh} بالاعتماد على المقدر α اقل ما يمكن

كما يأتي :

$$\textbf{MSE}(\hat{\alpha}_{sh}) = E[\alpha_{sh} - \alpha]^2$$

$$= E[k\alpha + (1-k)\alpha_0 - \alpha]^2$$

بإضافة وطرح $k\alpha$ نحصل على :

$$MSE(\hat{\alpha}_{sh}) = E[k\alpha^{\wedge} + (1-k)\alpha_0 - \alpha - k\alpha + k\alpha]^2$$

$$= E[k(\alpha^{\wedge} - \alpha) + (1-k)(\alpha_0 - \alpha)]^2$$

$$= k^2 E(\alpha^{\wedge} - \alpha)^2 + 2k(1-k)(\alpha_0 - \alpha)E(\alpha^{\wedge} - \alpha) + (1-k)^2(\alpha_0 - \alpha)^2$$

وباشتقاق المعادلة أعلاه بالنسبة إلى k نحصل على

$$\frac{dMSE(\alpha_{sh}^{\wedge})}{dk} = 2kMSE(\alpha^{\wedge}) + 2(1-k)(\alpha_0 - \alpha)\beta(\alpha^{\wedge}) - 2(1-k)(\alpha_0 - \alpha)^2$$

وبالتبسيط حصلنا على الصيغة الآتية :

$$k = \frac{(\alpha_0 - \alpha)^2 - (\alpha_0 - \alpha)\beta(\alpha^\wedge)}{MSE(\alpha^\wedge) - 2(\alpha_0 - \alpha)\beta(\alpha^\wedge) + (\alpha_0 - \alpha)^2} - - - - - (10)$$

أما إذا كان المقدر غير متحيز فان k تساوي :

$$k = \frac{(\alpha_0 - \alpha)^2}{MSE(\alpha^\wedge) + (\alpha_0 - \alpha)^2} - - - - - - (11)$$

ولتقدير معلمات دالة الشدة عمليات بواسون غير المتجانسة باستخدام طريقة التقلص نتبع ما يلي

$$\hat{\theta}_{sh} = k_1\hat{\theta} + (1-k_1)\theta_0 \quad \text{----------------}(12)$$

$$\beta_{sh} = k_2\beta^\wedge + (1-k_2)\beta_0 - - - - - (13)$$

أما التحيز للمقدرات أعلاه فهو :

$$\begin{aligned} Bias(\theta_{sh}^\wedge) &= E(\theta_{sh}^\wedge) - \theta \\ &= E(k_1\theta^\wedge + (1-k_1)\theta_0) - \theta \\ &= k_1E(\theta^\wedge) + (1-k_1)\theta_0 - \theta \end{aligned}$$

أما إذا كان المقدر غير متحيز فان

$$\begin{aligned} Bias(\theta_{sh}^\wedge) &= k_1\theta + (1-k_1)\theta_0 - \theta \\ &= (1-k_1)(\theta_0 - \theta) \end{aligned}$$

وبالطريقة نفسها يمكن إيجاد التحيز لمقدر

$$Bias(\beta_{sh}^\wedge) = k_2E(\beta^\wedge) + (1-k_2)\beta_0 - \beta$$

أما إذا كان المقدر غير متحيز فأن

$$Bias(\beta_{sh}^\wedge) = (1-k_2)(\beta_0 - \beta)$$

أما متوسط مربعات الخطأ لمقدرات التقلص هو

$$\begin{aligned} MSE(\theta_{sh}^\wedge) &= E(\theta_{sh}^\wedge - \theta)^2 \\ &= E(k_1\theta^\wedge + (1-k_1)\theta_0 - \theta)^2 \end{aligned}$$

بإضافة وطرح $k_1\theta$ نحصل على

$$MSE(\theta_{sh}^\wedge) = E(k_1\theta^\wedge + (1-k_1)\theta_0 - \theta - k_1\theta + k_1\theta)^2$$

$$MSE(\theta_{sh}^\wedge) = E(k_1(\theta^\wedge - \theta) + (1-k_1)(\theta_0 - \theta))^2$$

$$= k_1^2E(\theta^\wedge - \theta)^2 + 2k_1(1-k_1)(\theta_0 - \theta)E(\theta^\wedge - \theta) + (1-k_1)^2(\theta_0 - \theta)^2$$

وللوقوف على تفاصيل اكثر يمكن مراجعة المصدر (لازم، جاسم حسن،(2007) ،"مقارنة طرائق معلمات دالة الشدة لعمليات بواسون غير المتجانسة

5- الجانب التجريبي

في الجانب التجريبي تم ايجاد عمليـات بواسـون غير المتجانسة وفقا لطريقة القبول والرفض [4]، اضافة الى تطبيق الصيغ التقديريـة المتوصل إليها في الجانب النظري والتي تهدف إلى تقدير معلمات دالة الشدة على وفق لطرائق التقدير الإمكان الأعظم والعزوم والتقاص إذ تم استخدام الطريقة التكرارية (Iteration Method) مع الصيغ التقديرية المتوصل إليـها بطريقــة تقـدير الإمكـان الأعظم وتم تعويض النتائج التقديرية بالطريقة أعلاه فـي الـصيـغ التقديريـة لطريقتـي العـزوم والتقاص إذ تم اخذ المعـدل للنتائج التقديرية لمعلمتـي الشكل والقياس بطريقة العزوم إذ ظهرت مع كل وقت t نتيجة تقديريـة سـواء كانت لمعلمة الشكل أم القياس وتم ذلك على مرحلتين:

1- المرحلة الأولى المتمثلة بتوليد عمليات بواسون غير المتجانـسة بـناء عـلى فرض قيم مختلفة إلى T والتي تلائم حجوم العـينات المستخدمـة وكـما فـي الجدول الآتي :

حجم العينة	T
14	290
25	535
50	960
100	2163

ومن خلال التجربة وجدنا إن T المعروضة في الجدول أعلاه هي أفضل حالة لحجوم العينـات المقابلة لها.

2- المرحلة الثانية والمتمثلة بتعويض الأزمنة t_i المتوادة لعمليات بواسـون غير المتجانسة للمرحلة الأولى في الصيغ التقديرية لمعلمات دالة الشدة والمتوصل إليها في الجانب النظري.

وكما تم افتراض قيم أولية لمعلمات دالـة الشدة وكما في الجدول الآتي:

θ	β
0.5	0.8
0.3	0.8
0.7	0.8
0.5	0.6
0.5	0.9

وتم تكرار التجربة إلى (1000) مرة

5-2-مقياس المقارنة

لقد اعتمد الباحث على متوسط مربعات الخطأ كمقياس للمقارنة بين الصيغ التقديرية لطرائق التقدير المذكورة في الجانب النظري والصيغة هي :

$$MSE(\theta^\wedge) = \frac{\sum_{i=1}^{L}(\theta^\wedge_i - \theta)^2}{L}$$

حيث ان :L عدد مرات تكرار التجربة .
θ^ مقدر

5-3 توليد عمليات بواسون غير المتجانسة (طريقة الرفض والقبول)

لتوليد عمليات بواسون غير المتجانسة تم الاعتماد على طريقة القبول والرفض وعلى وفق الخوارزمية التالية .

<u>الخوارزمية (Algorithm)</u>

الخطوة 1: البداية .

الخطوة 2 : اجعل الوقت t يساوي صفر (t =0) والعداد يساوي واحد (I=1) .

الخطوة 3 : توليد متغير عشوائي U_I يتوزع توزيعاً منتظماً (0 1) Uniform .

الخطوة 4: اجعل

$$t_I = t_{I-1} - 1/P \, LOG(U_I)$$

الخطوة 5: اذا كان $t_I > T$ اذهب الى الخطوة رقم 11.

الخطوة 6 : توليد متغير عشوائي V_I يتوزع توزيعاً منتظماً (0 1) Uniform .

الخطوة 7 : اذا كان الشرط $V_I \ \lambda(t) / \lambda$
>
متحقق عندها اجعل $T_I = t$.
الخطوة 8 : اذا كان $V_I <= \lambda(t) / \lambda$
الخطوة 9 : اجعل العداد $I=I+1$.

الخطوة 10 : ارجع الى الحطوة رقم 3 .

الخطوة 11 : النهاية .

5-4 وصف تجربة المحاكاة الخاصة بالبحث

في تجربة المحاكاة تم توليد بيانات تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة على ضوء الدالة المفترضة وقد تم استخدام الازمنة t_I المتولدة من هذة العمليات في حساب الصيغ التقديرية لمعلمات دالة الشدة بالطرائق التقدير المختلفة بغية الوصول الى افضل تقدير من بين هذة الطرائق وتم استخدام حجوم عينات مختلفة لهذة الهدف وهي :

n= 14 , 25 ,50 ,100 .

وللوصول الى قيم اكثر واقعية تمثل المعلمات المقدرة كررت التجربة (1000) مرة .

وفيما يلي نتائج التقدير لتجربة المحاكاة لحجوم العينات (14, 25 , 50 , 100) والمثبتة في الجداول (2,1 , 3, 4) على التوالي .

جدول رقم (1)

يوضح نتائج طرائق التقدير لعينة حجمها 14

المعالم	القيم الافتراضية	طريقة الامكان الاعظم		طريقة العزوم		طريقة التقاص	
		القيم التقديرية	MES	القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE
θ	0.5	0.4960432	1.563603E-05	0.2422295	6.644568E-02	0.4980191	3.909011E-06
β	0.8	0.7989975	1.011275E-06	2.429886	2.65653	0.7994993	2.528177E-07
θ	0.3	0.2984232	2.486301E-06	0.2430615	3.242011E-03	0.2992122	6.215747E-07
β	0.8	0.7993786	3.807505E-07	1.068173	7.191691E-02	0.7996863	9.518708E-08
θ	0.7	0.6927529	5.248122E-05	0.2414023	0.2103118	0.6963745	1.31203E-05
β	0.8	0.798601	1.940137E-06	5.381466	20.98981	0.7993118	4.850335E-07
θ	0.5	0.4814312	3.447489E-04	2.205021E-02	0.2284361	0.4907191	8.618722E-05
β	0.6	0.596371	1.313852E-05	5.626836	25.26911	5.5981866	3.284627E-06
θ	0.5	0.4981369	30485541E-06	0.5326284	1.064638E-03	0.4990616	8.713874E-07
β	0.9	0.8994727	2.8349E-07	0.7211782	3.197733E-02	0.8997239	7.087336E-08

جدول رقم (2)

يوضح نتائج طرائق التقدير لعينة حجمها 25

المعالم	القيم الافتراضية	طريقة الامكان الاعظم		طريقة العزوم		طريقة التقاص	
		القيم التقديرية	MES	القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE
θ	0.5	0.4976484	5.551078E-06	0.206788	8.597332E-02	0.4988173	1.387769E-06
β	0.8	0.7994538	2.94159E-07	2.810181	4.040842	0.7997388	7.353995E-08
θ	0.3	0.2990603	8.826661E-07	0.2072091	8.610176E-03	0.2995301	2.206666E-07
β	0.8	0.7996677	1.12497E-07	1.284647	0.2348841	0.7998239	2.812486E-08
θ	0.7	0.6956798	1.863417E-05	0.2063731	0.2436677	0.6978367	4.658551E-06
β	0.8	0.7992551	5.576191E-07	6.150642	28.6295	0.7996226	1.39404E-07
θ	0.5	0.48739	1.591166E-04	1.459011E-02	0.2356229	0.49369	3.977915E-05
β	0.6	0.5977809	4.90324E-06	6.434282	34.03886	0.5988966	1.22581E-06
θ	0.5	0.4989609	1.087136E-06	0.496489	1.233129E-05	0.4994808	2.71784E-07
β	0.9	0.8997228	7.261036E-08	0.9098915	9.788048E-05	0.8998576	1.815392E-08

جدول رقم (3)
يوضح نتائج طرائق التقدير لعينة حجمها 50

المعالم	القيم الافتراضية	طريقة الامكان الاعظم		طريقة العزوم		طريقة التقلص	
		القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE
θ	0.5	0.4985284	2.178993E-06	0.179034	0.1030193	0.4992659	5.44749E-07
β	0.8	0.7996836	9.805097E-08	3.151958	5.531675	0.7998499	2.451133E-08
θ	0.3	0.2994089	3.46467E-07	0.1792618	1.457774E-02	0.2997099	8.66173E-08
β	0.8	0.7998047	3.793125E-08	1.479664	0.4619406	0.7999084	9.482306E-09
θ	0.7	0.6972899	7.315236E-06	0.1788105	0.271638	0.6986513	1.828812E-06
β	0.8	0.7995645	1.842585E-07	6.834553	36.41584	0.7997891	4.606162E-08
θ	0.5	0.4911108	7.910649E-05	9.995984E-03	0.2401028	0.4955503	1.977662E-05
β	0.6	0.5985707	2.051747E-06	7.154801	42.96551	0.5992833	5.129345E-07
θ	0.5	0.4993879	3.796373E-07	0.4656711	1.178476E-03	0.4996944	9.490938E-08
β	0.9	0.8998454	2.156017E-08	1.079601	3.225635E-02	0.8999186	5.390993E-09

جدول رقم (4)
يوضح نتائج طرائق التقدير لعينة حجمها 100

المعالم	القيم الافتراضية	طريقة الامكان الاعظم		طريقة العزوم		طريقة التقلص	
		القيم التقديرية	MES	القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE
θ	0.5	0.4992314	5.941538E-07	0.146398	0.1250547	0.4996096	1.485397E-07
β	0.8	0.799861	2.175414E-08	3.624932	7.980255	0.7999267	5.436198E-09
θ	0.3	0.299693	9.446673E-08	0.1464663	0.0235725	0.2998458	2.361573E-08
β	0.8	0.7999118	8.524213E-09	1.750242	0.9029496	0.799946	2.133799E-09
θ	0.7	0.6985905	1.994843E-06	0.1462751	0.3066114	0.6992853	4.987149E-07
β	0.8	0.7998036	4.04839E-08	7.77214	48.61111	0.7999075	1.01195E-08
θ	0.5	0.4945323	2.992679E-05	5.878216E-03	0.2441559	0.49726	7.48168 E-06
β	0.6	0.5992071	6.26089E-07	8.142731	56.89301	0.599608	1.565261E-07
θ	0.5	0.4997007	8.798904E-08	0.4257635	5.511112E-03	0.4998489	2.199664E-08
β	0.9	0.8999463	4.070792E-09	1.314813	0.1720688	0.8999642	1.018512E-09

من خلال ملاحظة الجداول السابقة نجد ان نتائج تقديرات طريقة التقلص هي الافضل من بين طرائق التقدير المعتمدة في البحث والمتمثلة بطريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وذلك بالنسبة لمعاملتي القياس والشكل اذ حظي تقدير طريقة التقلص باقل متوسط لمربعات الخطأ لمعلمتي القياس والشكل ولجميع حجوم العينات المعتمدة وهي (14,25,50,100)

ويمكن ملاحظة ذلك بوضوح من خلال الجدول رقم (5) الاتي

جدول رقم (5)

يوضح نتائج لأفضل طريقة تقدير (طريقة التقلص) لحجوم العينات (14,25,50,100)

المعالم	القيم الافتراضية	14 حجم العينة		25 حجم العينة		50 حجم العينة		100 حجم العينة	
		القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE	القيم التقديرية	MSE
θ	0.5	0.4980191	3.909011E-06	0.4988173	1.387769E-06	0.4992659	5.44749E-07	0.4996096	1.485397E-07
β	0.8	0.7994993	2.528177E-07	0.7997388	7.353995E-08	0.7998499	2.451133E-08	0.7999267	5.436198E-09
θ	0.3	0.2992122	6.215747E-07	0.2995301	2.206666E-07	0.2997099	8.66173E-08	0.2998458	2.361573E-08
β	0.8	0.7996863	9.518708E-08	0.7998239	2.812486E-08	0.7999084	9.482306E-09	0.799946	2.133799E-09
θ	0.7	0.6963745	1.31203E-05	0.6978367	4.658551E-06	0.6986513	1.828812E-06	0.6992853	4.987149E-07
β	0.8	0.7993118	4.850335E-07	0.7996226	1.39404E-07	0.7997891	4.606162E-08	0.7999075	1.01195E-08
θ	0.5	0.4907191	8.618722E-05	0.49369	3.977915E-05	0.4955503	1.977662E-05	0.49726	7.481687E-06
β	0.6	5.5981866	3.284627E-06	0.5988966	1.22581E-06	0.5992833	5.129345E-07	0.599608	1.565261E-07
θ	0.5	0.4990616	8.713874E-07	0.4994808	2.71784E-07	0.4996944	9.490938E-08	0.4998489	2.199664E-08
β	0.9	0.8997239	7.087336E-08	0.8998576	1.815392E-08	0.8999186	5.390993E-09	0.8999642	1.018512E-09

6- الاستنتاجات والتوصيات

6-1 الاستنتاجات

1- إن طريقتي الإمكان الأعظم والتقلص تكون متقاربة من حيث النتائج أما طريقة العزوم فقد ابتعدت كثيرا من حيث نتائج التقدير عن نتائج طريقتي الإمكان الأعظم والتقلص.

2- من خلال التجارب المولدة بحجوم (25,14 , 50 , 100) أعطت طريقة التقلص أفضل تقديرات لمعلمات دالة $\lambda(t)$ اعتمادا على متوسط مربعات الخطأ إذ حظيت بأقل متوسط مربعات الخطأ من بين التقديرات الأخرى.

3- بالرجوع الى الجداول المتعلقة بالموضوع وجدنا بان قيم متوسط مربعات الخطأولكل المقدرات تتناقص بازدياد حجم العينة .

6-2 التوصيات

1- استخدام طريقة بيز لتقدير معلمات دالة الشدة العائدة لعمليات بواسون غير المتجانسة.

2- لا ينصح الباحث باستخدام طريقة العزوم في تقدير معلمات دالة الشدة لعمليات بواسون غير المتجانسة إذ أعطت اكبر متوسط مربعات الخطأ وكانت التقديرات بعيدة كثيرا عن القيم الافتراضية لمعلمات دالة الشدة

المصادر العربية

1- البياتي، حسام نجم عبود، (2002)، "مقارنة تقدير لنموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة"، أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد .

2- شاهر، ثائر فيصل، (2005)، "طرائق تقدير عدد مرات الفشل في الأنظمة القابلة للإصلاح"، أطروحة دكتوراه، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

3- الطائي، خالد ضاري والحسيني، عبد الرحمن، (1990)، "الحاسبة الالكترونية والبرمجة بلغة بيسك"، مطبعة الديواني، بغداد .

4- العذاري، فارس مسلم، والوكيل، علي عبد الحسين، (1991) ، "العمليات التصادفية"، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، جامعة بغداد .

المصادر الأجنبية

5-Chapter Four, "poisson processes" , www.publichealth. pitt.edu\ supercourse \ super course PPT \ 19011 –20001 \19501 .(pdf)

6-Melamed, B. and Rubinstein, (1998) , " Modern Simulation and Modeling ", John Wiley & Sons,INC .

7-Rigdon, S.E. and Basu, A.P. , (2000) ,"Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems " , John Wiley & Sons , INC .

8- Sheldon, M. Ross, (1985), "Introduction To Probability Models" , Academic press , INC.

9-Virtamo, J.,"Queueing Theory" , www.netlab.tkk.fi \ opetus\ S38143\ luennot \ E_poisson.(pdf)