

Feedback adjustment using exponentially weighted moving average schemes

Abstract

In this study, we discuss the use of exponentially weighted moving average (EWMA) schemes in feedback adjustment for process improvement. By application the different measures of dispersion yield different optimal values. In particular it is suggested that a robust statistic based on the median is more appropriate than the usual mean of square error (MSE). We also consider an autoregressive time series model for modeling the deviations from target and this model is compared with the usual EWMA model. The problem of applying feedback adjustment to a controllable process is discussed and it is shown via a simulation that correlation structure of the data of interest play a critical role on whether the MSE after adjustment is lower than the MSE before adjustment.

Dr. Jinan Abbas Naser

الخلاصة :

في هذا البحث نناقش استخدام خطط المتوسط المتحرك الموزون اسيا (EWMA) في تعديل التغذية العكسية لتحسين العملية. بتطبيق المقاييس المختلفة للتشتت لنحصل على عدة قيم مثلى مختلفة لعامل الاضمحلال بالتحديد الاحصاء الرصينة المعتمدة على الوسيط (Median) المقترحة في هذا البحث، أذ تكون اكثر ملائمة من متوسط مربعات الخطاء (MSE) الاعتيادي. نفترض ايضا نمذجة الانحرافات عن قيمة الهدف (T) بنموذج سلسلة زمنية $AR(1)$ ومقارنته مع نموذج الـ EWMA الاعتيادي. كما نناقش تطبيق التغذية العكسية لعملية يمكن السيطرة عليها، وتبين من خلال المحاكاة بأن درجة الارتباط للبيانات التي نهتم بها تلعب دور حاسم فيما اذا كانت قيمة الـ MSE بعد التعديل اقل من قيمة الـ MSE قبل التعديل.

١. المقدمة

نتناول في هذا البحث عدة اساليب لتعديل التغذية العكسية باستخدام خطط المتوسط المتحرك الموزون اسيا (EWMA). وقد استخدمت خطط الـ EWMA في مجال السيطرة النوعية [6]. لقد اقترحت لوحة الـ EWMA من قبل الباحث Roberts عام ١٩٥٩ وذلك برسم المتوسط المتحرك الموزون اسيا ولكافة المشاهدات السابقة والحالية للعملية الانتاجية. إن لوحة الـ EWMA تمثل دالة تنبوء بفترة واحدة للامام وتكون وفق الصيغة الاتية :

$$Z_t = GX_t + (1-G)Z_{t-1}$$

أذ تكون X_t المشاهدة رقم t ($t=1, 2, \dots, n$). أما G فتمثل عامل الاضمحلال تتراوح قيمته بين الصفر والواحد. ويتم اختيار قيمة بداية ملائمة لـ Z_0 . وان حدي السيطرة الادني (LCL) والاعلى (UCL) لتلك اللوحة في حالة الاستقرارية تكون وفق الصيغة الاتية :

$$LCL = \bar{X} - K\sigma\sqrt{G/(n(2-G))}$$

$$UCL = \bar{X} + K\sigma\sqrt{G/(n(2-G))}$$

أذ ان \bar{X} و σ يمثلان متوسط العينة والانحراف المعياري للعينة وتكون مقدره نموذجيا من البيانات. اما K فتمثل قيمة ثابت حد السيطرة وقيمته مساوية لـ $K=3$. ويقال ان العملية الانتاجية تكون خارج السيطرة الاحصائية اذا قطع منحنى احصاء الاختبار (Z_t) إحدى حدي السيطرة المتقدم ذكرهما. إن استخدام خطط الـ EWMA اسلوب شائع الاستخدام في عملية السيطرة الاحصائية. وفي هذا البحث نستخدم خطط الـ EWMA في مجال السيطرة والتنبوء بالقيمة الحالية. من خلال تطبيق اسلوب تعديل التغذية العكسية لعملية تكون خارج السيطرة الاحصائية لغرض اعادة تلك العملية الى حالة تحت السيطرة الاحصائية. فعندما تكون البيانات لعملية معينة تعرض عدة نقاط بعيدة عن قيمة الهدف (أكبر من قيمة الهدف) أو تكون القيم تأخذ اتجاه متزايد عن القيمة النموذجية (قيمة الهدف) التي تحدد من البيانات السابقة للعملية أووفقا لشروط ومتطلبات النوعية. أذ ان استخدام لوحة السيطرة لرسم البيانات (نقاط العملية X_t مقابل الوقت t) بعد تحديد الخط المركزي فقط الذي يمثل قيمة الهدف في اللوحة. يمكن ان نستنتج من الرسم في اللوحة فيما إذا كانت العملية الانتاجية تحت السيطرة (قريبة لقيمة الهدف) أو خارج السيطرة. فإذا كانت العملية خارج السيطرة (تعرض عدة نقاط أكبر من قيمة الهدف)، في هذه الحالة يجب اتخاذ اجراء لارجاع العملية الى حالة تحت السيطرة. أن استخدام سيطرة التغذية العكسية تتيح للباحث التنبوء بقيمة حد الخطأ من خلال توضيف خطة التعديل. لقد تناول العديد من الباحثين سيطرة التغذية العكسية نذكر منهم مثلا الباحثان Box و Luceno [2] عام ١٩٩٧ أذ تناولوا موضوع السيطرة الاحصائية لمراقبة العملية الانتاجية باستخدام تعديل التغذية العكسية. وقام الباحث Joseph [5] عام ٢٠٠٣ بدراسة رصانة معلمة

التصميم المستخدم بسيطرة التغذية الامامية (Feed-Forward). وفي هذا البحث ندرس الصيغ المقترحة من قبل الباحث Triantafyllopoulos [8] عام (2007) لاسلوب تعديل التغذية العكسية باستخدام نماذج الـ EWMA لعملية انتاجية تكون خارج السيطرة واعادتها الى حالة تحت السيطرة (جعل قيم العملية الانتاجية قريبة لقيمة الهدف). ثم تطبيق الاسلوب المتقدم ذكره لعملية تكون تحت السيطرة بصورة تامة (لسلاسل زمنية مستقرة) ومرتبطة ولدت من أنموذج الانحدار الذاتي لتحديد القيم المثلى لعامل الاضمحلال (G) ولكلا الحالتين المتقدم ذكرها باعتماد مقاييس مختلفة للتشتت.

٢. هدف البحث

يتمثل بتطبيق اسلوب تعديل التغذية العكسية باستخدام نماذج الـ EWMA لعملية انتاجية تكون خارج السيطرة وارجاع تلك العملية الى حالة تحت السيطرة (جعل قيم العملية قريبة لقيمة الهدف). ودراسة تأثير عامل الاضمحلال (G) المعتمدة في حساب القيم المعدلة (y_t^a) للعملية، وتحديد القيم المثلى له من خلال تطبيق مقاييس التشتت منها MSE و MedAPE و MPE. وكذلك دراسة الاسلوب المتقدم ذكره لعملية تكون تحت السيطرة بصورة تامة ومرتبطة مولدة من أنموذج الانحدار الذاتي (1) AR عندما يكون توزيع حد الخطاء للسلسلة المولدة يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,1)$ ووفقا لقيم مختلفة لمعلمة الانحدار الذاتي (ρ) التي تمثل درجة الارتباط في البيانات لتحديد تأثير درجة الارتباط على القيم المعدلة (y_t^a) للسلسلة الزمنية المولدة من خلال اعتماد معيار MSE فضلا عن تحديد القيم المثلى لـ G.

٣. أساسيات في تعديل التغذية العكسية

٣-١ تمهيد

لنفترض عملية سيطرة بسيطة تتضمن متغير داخلي ومتغير خارجي ومتغير تعويضي [2,8]. أذ تستخدم قيمة المتغير التعويضي للتعديل في قيمة المتغير الداخلي لذلك فأن قيمة المتغير الخارجي تبقى قريب لقيمة الهدف للعملية الانتاجية. ولنفترض T تمثل قيمة الهدف التي تكون مماثلة للخط المركزي المستخدم في لوحات السيطرة [6]. وبافتراض ان $\{x_t\}_{t \geq 1}$ تمثل المتغير الداخلي و $\{y_t\}_{t \geq 1}$ تمثل المتغير الخارجي و $\{X_t\}_{t \geq 1}$ تمثل المتغير التعويضي. أن مقياس عامل التغير في قيمة المتغير الخارجي بوحدة واحدة للتغيير في قيمة المتغير التعويضي يشار له كربح العملية ويمثل بالرمز g. أن ذلك يعني زيادة X_t بوحدة واحدة يؤدي بزيادة في y_t بـ g من الوحدات. لنفرض y_t^a المتغير الخارجي بعد تطبيق اسلوب تعديل التغذية العكسية، وان الخطاء المرتبط للمتغير الخارجي يكون $e_t = y_t^a - T$ عندما تمثل T القيمة النموذجية للعملية. وسيكون المتغير المعدل x_t (the adjustment variable) دالة لـ X_t . وفي اغلب الحالات التطبيقية نحصل على x_t بأيجاد سلسلة الفروق $x_t = X_t - X_{t-1}$. من التعريف لـ g والتعديل المتقدم ذكره يمكن كتابة الصيغة الاتية:

$$g x_t = -e_t \quad \dots(1)$$

أذ ان x_t أستخدمت لتلغي الخطاء ولهذا السبب أستخدمت الاشارة السالبة في الصيغة (1) ويعرف هذا بالتعديل التام. مع ذلك فان عامل الاضمحلال يكون عادة كفوء اكثر، بكلام اخر ان عامل الاضمحلال (G) سيؤثر على التعديل وكما مبين في الصيغة ادناه :

$$g x_t = -Ge_t \Leftrightarrow x_t = -(G/g) e_t \quad \dots (2)$$

وتسمى الصيغة (2) بمعادلة التعديل، وهي الجزء المماثل لما يعرف بـ (Integral control (IC المستخدم في عملية السيطرة الهندسية. وتعرف الـ IC عندما يكون الوقت t مستمر [2] بـ

$$g X_t = K_0 + K_1 \int e_t dt$$

حيث ان K_0 و K_1 ثوابت. اما عندما يكون الوقت t متقطع فان الـ IC تعرف كالآتي :

$$g X_t = K_0 + K_1 \sum_{i=1}^t e_i \quad \dots(3)$$

وفقا للصيغة المتقدم ذكرها يمكن ان نبين وفق الترتيب اعلاه لمتغير الداخلي والخارجي والتعويضي يمكن الحصول على القيم لـ K_0 و K_1 وذلك بوضع K_0 مساوية لـ $K_0 = g X_0$ عندما تعطى القيمة الابتدائية لـ X_0 و $K_1 = -G$ مساوية لـ $K_1 = -G$. فأذا كان الباحث لديه معرفة بالاختفاء e_t يمكن اعتماد معادلة التعديل وفقا للصيغة (2) ويطبق التعديل ويرجع متغير الاستجابة y_t الى قيمة الهدف. وبما انه لا يستطيع الباحث معرفة الاخطاء التي تحدث في المستقبل، لذا يجب استخدام معالجة للتنبوء بالاختفاء (e_t). وسيكون ذلك باستخدام التمهيد اسي.

3-2 التنبوء باستخدام الـ EWMA

لغرض تطبيق لما يسمى بـ predictive control ينبغي ان نفترض الخطاء قبل التعديل. أي الخطاء الممكن حدوثه في حالة عدم اتخاذ اجراء سيطرة ونمثل هذا الخطاء في الوقت t بـ Z_t عندما تكون Z_t مساوية لـ $Z_t = y_t - T$ ، أي ان Z_t تمثل انحراف المشاهدة y_t بالوقت t عن القيمة النموذجية (قيمة الهدف). أذ لانستطيع معرفة قيمة Z_{t+1} في الوقت الحاضر t ، لكن نستطيع التنبوء بها، ولذلك نستخدم معادلة التعديل وفقا للصيغة الآتية :

$$g X_t = -\hat{Z}_{t+1} \quad \dots(4)$$

وتمثل \hat{Z}_{t+1} القيمة المتنبأ بها للخطاء Z_{t+1} . وباستخدام التعديل الاعتيادي اي ايجاد سلسلة الفروق $Z_t = X_t - X_{t-1}$ ، فان المعادلة (4) تكون مساوية لـ $g x_t = -(Z_{t+1} - Z_t)$. تضمّن الصيغة (2) قيمة الخطاء بعد التعديل (e_{t+1}) وتكون قيمة e_{t+1} مساوية لـ $e_{t+1} = Z_{t+1} - \hat{Z}_{t+1}$. وان الصيغة (2) تصبح كالآتي

$$g x_t = -Ge_t = -G(Z_t - \hat{Z}_t)$$

ومن المعادلة (3) القيمة المتنبأ بها لـ \hat{Z}_{t+1} يجب ان تحقق الاتي :

$$\hat{Z}_{t+1} - \hat{Z}_t = G(Z_t - \hat{Z}_t) \Leftrightarrow \hat{Z}_{t+1} = GZ_t + (1-G)\hat{Z}_t \quad \dots(5)$$

أن الصيغة (5) تعرف بالمتوسط المتحرك الموزون اسيا (EWMA) مع عامل الاضمحلال G. وأن الفرق (1-G) يسمى بعامل الخصم للـ EWMA. وعليه فان المتغير الخارجي بعد التعديل يكون وفقا للصيغة الاتية :

$$y_{t+1}^a = y_{t+1} + gX_t \quad \dots(6)$$

وفي الصيغة الاخيرة يبقى فقط خطأ تنبوء المتوسط المتحرك الموزون اسيا ويعرف بالخطأ بعد التعديل (e_t).

٤. تحليل الحساسية لـ G

أذا استخدمت خطة المتوسط المتحرك الموزون اسيا للتنبوء بالخطأ (Z_t) لفترة واحدة للامام (one step a head) كما موضحة في المبحث (2-3) مع عامل الاضمحلال G، لذا فان أصغر قيمة لمعدل مربعات الخطأ (MMSE) يمكن ان يتحقق باختيار القيمة المثلى لـ G. وفي التطبيق فان قيم G التي تعطي أصغر قيمة لـ MSE (MMSE) تكون بين 0.1 و 0.4. ويتم حساب MSE وفق الصيغة الاتية :

$$\text{MSE (before adjustment)} = (1/n) \sum_{t=1}^n (y_t - T)^2 \quad \dots(7)$$

وان

$$\text{MSE (After adjustment)} = (1/n) \sum_{t=1}^n (y_t^a - T)^2 \quad \dots(8)$$

حيث ان $n > 0$ تكون عدد صحيح (حجم العينة)، T قيمة الهدف النموذجية، y_t تمثل القيمة الحقيقية للظاهرة عند الوقت t قبل التعديل، y_t^a القيمة المعدلة عند الوقت t ($t=1,2,\dots,n$). ولان كلا المقياسين يستخدم متوسط الاخطاء [4]، لذلك لايمكن مقياس الـ MSE (MMSE) للكشف عن الشوارد أو تعديلها. لذا أقترح الباحث Fildes عام 1992 [4] احصاءة رصينة هي الوسيط لنسبة الخطأ المطلق (Med APE). وتعرف وفق الصيغة الاتية:

$$\text{MedAPE} = \text{median} \{ (| y_t^a - T |) / y_t^a \} \quad \dots(9)$$

فأذا ضرب المقياس بـ 100، فان هذا المقياس يعطي مقياس نسبي لرصانة غير متحيزة للقيم الشاردة. و يكون هذا المقياس افضل من مقياس الـ MSE لاختيار القيمة المثلى لـ G وفقا لاصغر قيمة لمقياس الـ MedAPE، لان الوسيط لايعتمد على الموقع للتوزيع النظري للأخطاء، الا ان مقياس الـ MedAPE يمكن ان يكون طريقة متحيزة وغير ملائمة لكل مجموعة من البيانات. مقياس اخر يمكن اعتماده

لاختيار افضل قيمة لـ G يعتمد على نسبة الخطاء المطلق ويشار اليه كمعدل نسبة الاخطاء ويكون وفق الصيغة الاتية :

$$MPE = \left\{ \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t^a - T}{ny_t^a} \right) \right\} * 100 \quad \dots(10)$$

وتكون المعادلة (10) الاحصاء التي تحدد فيما اذا كان تعديل التغذية العكسية متحيز أم لا. فإذا كان التعديل غير متحيز، فإن قيمة الـ MPE ستكون قريبة للصفر. لذا يفضل حساب المقاييس المتقدم ذكرها اعلاه ومحاولة اختيار المقاييس الأكثر ملائمة، وقد ذكر الباحث Sachs عام 1982 [7] ان المقياس الـ MSE يكون اكثر كفاءة في حالة عدم وجود قيم شاردة في البيانات، بخلاف ذلك فان مقياس الـ Med APE سيعطي نتائج افضل.

5. نمذجة حد الاضطرابات (The disturbances)

في المبحث (3) لم نفترض أنموذج لسلسلة الاضطرابات $\{Z_t\}_{t \geq 1}$. وفي هذا المبحث نفترض أنموذجين لحد الاضطرابات اولهما يكون أنموذج (1) IMA والثاني يكون أنموذج (1) AR. أولاً: نفترض أنموذج (1) IMA لذا الاضطرابات قبل التعديل في الوقت t تكون وفق الصيغة الاتية :

$$Z_t - Z_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}$$

عندما يكون متوسط a_t مساوي لصفر وبتباين معلوم مقداره σ_a^2 . وتكون القيمة المتنبأ بها لـ Z_t (Z_t) مساوية لـ $Z_t = Z_{t-1} - \theta a_{t-1}$ ويمكن برهنة بأن $Z_{t+1} = Z_t - \theta a_t = Z_t - \theta(Z_t - Z_{t-1})$ لان $a_t = Z_t - Z_{t-1}$ باستخدام التعريف. الآن الصيغة اعلاه لـ Z_{t+1} يمكن ان تكتب كالاتي :

$$\hat{Z}_{t+1} = (1-\theta) \hat{Z}_t + \theta \hat{Z}_t \quad \dots(11)$$

وتكون \hat{Z}_{t+1} متوسط متحرك موزون اسيا مع عامل الاضمحلال $G = 1 - \theta$. لذلك يمكن ان نفترض ان الاضطرابات يمكن ان تمثل بأنموذج (1) IMA ومعادلة التعديل $X_t = -Z_{t+1}$ (تكون مكافئة للمعادلة (4) في المبحث (2-3)). أن سيطرة التغذية العكسية تعطي أصغر قيمة لـ MSE (MMSE) للمتغير الخارجي. ويتضمن نظريا بأن $e_t = a_t$ ولهذا السبب فان هذا الاسلوب يعطي أصغر قيمة تباين للمتغير الخارجي، عندما يكون التباين للمتغير العشوائي $\text{VAR}(e_t) = \sigma_e^2 = \sigma_a^2$.

ثانياً: الأنموذج الثاني لـ $\{Z_t\}_{t \geq 1}$ هو أنموذج (1) AR. إذ يتم توليد قيمة حد الاضطراب غير المعدلة بالمعادلة التالية :

$$Z_t = \phi Z_t + a_{t+1} \quad \dots(12)$$

اذ تكون قيمة الثابت ϕ تتراوح بين 1 و 1- والـ a_t^s قد سبق تعريفها في المبحث (5) - اولاً. وبافتراضات النمذجة هذه، يمكن أن نبين بأن تعديل التغذية يعطي أصغر قيمة لـ MSE باستخدام معادلة التعديل التالية :

$$\hat{g} X_t = - (\phi / (1-\phi)) e_{t+1} \dots (13)$$

أذ تكون e_{t+1} متوسط متحرك موزون اسيا مع عامل الاضمحلال $G = 1-\phi$. اما قيمة الثابت ϕ فيمكن اختيارها باستخدام المعالجة التي تعطي أصغر قيمة لـ MSE (MMSE)، او يمكن تقديرها باستخدام معالجة التقدير لـ Box-Jenkins [1,3].

6. الاخطاء المعدلة لعملية تحت السيطرة

النظرية المرتبطة لتعديل التغذية العكسية [2] تطبق عادة للعمليات التي تعرض عدة نقاط خارج السيطرة. أذ توصف العمليات المتقدم ذكرها في المبحث (2-3)، أولاً لحالة خارج السيطرة. مع ذلك ممكن تطبيق تعديل التغذية العكسية لعملية تكون سابقاً تحت السيطرة بصورة تامة. ولاحظ العديد من الباحثين ان تطبيق تعديل التغذية العكسية لعملية مع اضطرابات مستقلة ومتطابقة التوزيع، فان قيمة الـ MSE بعد التعديل تكون اعلى من قيمة الـ MSE قبل التعديل. في حين اذا كانت الاضطرابات مرتبطة فان قيمة الـ MSE بعد التعديل تكون اقل من الـ MSE قبل التعديل. وكما سيتم مناقشتها لاحقاً بشكل مفصل.

7. الجانب التطبيقي

يتضمن هذا الجانب عرض الاساليب التي يتم من خلالها توضيح الطرق المستخدمة لتعديل التغذية العكسية الموصوفة في الجانب النظري، تكون هذه الاساليب بالتنبؤ باستخدام نماذج الـ EWMA، و تحليل الحساسية لـ G ونمذجة الاضطرابات والاطفاء المعدلة لعملية تحت السيطرة. وقد استخدم برنامج الـ Matlab للحصول على النتائج مما تقدم ذكره، فضلاً عن استخدام الـ Minitab في بعض جوانب التحليل لنمذجة الاخطاء بأنموذجي (1) IMA و (1) AR.

7-1 التنبؤ باستخدام الـ EWMA

في هذا المبحث نستعرض مثال توضيحي لطريقة تعديل التغذية العكسية الموصوفة في المبحث (2-3). فقد أخذت مئة قيمة تمثل قياسات الوزن لمئة مشبكة رصاصية من النوع D/601 لمنتوج معمل البطاريات السائلة (معمل بابل -2) وقد كان الوزن المحدد وفقاً للمواصفات المحددة للمعمل هو 150، وعليه فان $T=150$ وقد رسمت هذه الاوزان مع قيمة الهدف $T=150$ وكما مبين في الشكل (1) في الملحق.

وكما يتضح من الشكل (1) بأن العملية تكون بعيدة عن قيمة الهدف، وان العملية تكون خارج السيطرة، وبذلك يمكن استخدام تعديل التغذية العكسية الموصوفة في المبحث (2-3) لارجاع العملية قريبة لقيمة الهدف. بافتراض ان $G=0.2$ ولنفس قيمة T فان الحسابات للقيم المعدلة للاوزان تكون كالآتي:

في الوقت $t=1$ ، لا يتم إجراء تعديل ولا تنبؤ ، لذا فإن $y_1^a = y_1 = 150$ ، إذ أن $Z_t = y_t - T = 0$ عندما تكون $t=1$ ، وقيمة البداية للـ EWMA Z_t تكون مساوية للصفر. ومن المعادلة (5) $Z_{t+1} = G(0) + (1-G)(0)$ وبذلك لا يطبق تعديل في الوقت $t=2$ وان $y_2^a = y_2 = 155$. وان تنبؤ الـ EWMA يكون $Z_3 = GZ_2 + (1-G)Z_2 = 1$ وتكون قيمة المتغير التعويضي $X_2 = 1$ ، التي تستخدم لتعديل قيمة y_3 عندما تكون $y_3 = 145$ وقيمة حد الاضطراب قبل التعديل $-5 = 145 - 150 = Z_3$ ، القيمة المعدلة عند $t=3$ تكون $y_3^a = y_3 - Z_3 = 144$. وهكذا نتستمر بهذا الاسلوب لغاية $t=100$ التي تعطي قيمة $y_{100}^a = 150.82$. وكما مبين في الشكل (2) القيم المعدلة (y_t^a) لـ y_t في الملحق.

بمقارنة الشكلين (1,2) (انظر الملحق) نلاحظ تحسن العملية بعد التعديل. إذ كما هو واضح بان العملية بعد التعديل ترجع قريبة لقيمة الهدف انظر الشكل (2) في الملحق. يمكن استخدام مقياس الـ MSE قبل وبعد التعديل وفق الصيغتين (7) و(8) وعلى التوالي المتقدم ذكرها في المبحث (4) كصيغة قياس لهذه المقارنة. إذ تكون قيمة $MSE(\text{before Adjustment}) = 51.24$ في حين تكون $MSE(\text{After Adjustment}) = 11.327$ وهي اقل من قيمة الـ MSE قبل التعديل. وسيتم مناقشة مقاييس الاخطاء بشكل مفصل في المبحث التالي.

7-2 تحليل الحساسية لـ G

في هذا المبحث أستخدم تعديل التغذية العكسية وفقا لما تم توضيحه في المبحث (7-1) ولعدة قيم لـ G هي $0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ للمثال المتقدم ذكره في المبحث (7-1) بهدف تحديد القيمة المثلى لـ G بالاعتماد على معيار اصغر قيمة لـ MSE بعد التعديل (MMSE) أو اعتماد اصغر قيمة لـ Med APE أو اعتماد معيار اقتراب القيمة لـ MPE للصفر. والمتقدم ذكرها في المبحث (4). فقد لخصت النتائج في الجدول (1).

جدول (1) يبين مقاييس التشتت الثلاثة (MSE , Med APE , MPE) لتحليل الخطأ.

G	MSE (After Adjustment)	Med APE %	MPE%
0.1	11.010	1.76	0.55
0.2	11.133*	1.73*	0.26
0.3	11.473	1.83	0.16
0.4	12.047	1.73*	0.10
0.5	12.792	1.76	0.65
0.6	13.716	1.77	0.04
0.7	14.806	1.85	0.02
0.8	16.266	1.95	0.004*
MSE (before Adjustment)	51.240		

ونلاحظ من الجدول اعلاه ماياتي :

- ان كل قيم MSE (After Adjustment) كانت اقل من الـ MSE (before Adjustment).
- أن اصغر القيم لـ MSE (After Adjustment) تكون عند قيم $G=0.1,0.2,0.3,0.4$ وهذا يتفق مع ماتقدم ذكره في الجانب النظري في المبحث (5).
- ان اصغر قيمة لمقياس MSE (After Adjustment) تكون 11.133 عند القيمة $G=0.2$.
- ان اصغر قيمة لمقياس Med APE تكون 0.0173 أو 1.73% عند القيمتين $G=0.2,0.4$.
- ان اصغر قيمة لمقياس MPE تكون 0.00004 أو 0.004% عند القيمة $G=0.8$.

ونلاحظ مما تقدم ان القيمة المثلى لـ G وفقا لمعيار الـ MMSE(After Adjustment) تناظره قيمة $Med APE=1.73\%$ و $MPE=0.26\%$. وان استخدام المقاييس الثلاثة المتقدم ذكرها اعطى قيم مختلفة لـ G ، يمكن ايضا اختيار قيمة G بالاعتماد على عدد النقاط الشاردة لقيم y_t^a فضلا عن المقاييس المتقدم ذكرها.

7-3 نمذجة حد الاضطرابات (The disturbances)

اولا: في هذا المبحث سيتم ايجاد قيمة حد الاضطراب قبل التعديل بالاعتماد على قيم الاوزان المتقدم ذكرها في المبحث (7-1) اي تحديد قيم $Z_t = y_t - T$ ومع افتراض أنموذج $IMA(1)$ ووفقا لما ورد في المبحث (5) -اولا. وقد استخدم التطبيق الجاهز Minitab للحصول على تقدير قيمة الثابت θ ، ثم استخدم تعديل التغذية العكسية وتطبيق الصيغة (6) لأيجاد لقيم المعدلة (y_t^a). فقد كانت قيمة $\theta = 0.8299$ والتي تعطي أصغر قيمة لـ MSE وقيمة 11.113 تناظره قيمة $Med APE = 1.71\%$ و $MPE = 0.32\%$.
لاحظ الشكل (3) في الملحق وهو تقريبا مماثل للشكل (2) على الرغم من اختلاف قيمة G .

ثانيا: في هذا المبحث سيتم ايجاد قيمة حد الاضطراب قبل التعديل اي تحديد قيم $Z_t = y_t - T$ وبافتراض أنموذج $AR(1)$ وفق الصيغة (12) فقد استخدم التطبيق الجاهز Minitab للحصول على البواقي e_t وقيمة الثابت ϕ ، وباستخدام قيم الاوزان المتقدم ذكرها في المبحث (7-1)، تم استخدام تنبوء الـ EWMA للحصول على e_{t+1} الذي يكون متوسط متحرك موزون اسيا مع عامل الاضمحلال $G = 1 - \phi$. ثم استخدمت المعادلة (13) في التعديل لقيم y_t^a . وقد كانت قيمة $\phi = 0.8087$ والتي تعطي اصغر قيمة لـ MSE وقيمة 18.382 تناظره قيمة $MedAPE = 1.94\%$ و $MPE = 0.69\%$. لاحظ الشكل (4) في الملحق.

بهدف معرفة تأثير قيمة الثابت ϕ في أنموذج $AR(1)$ على قيمة كل من الـ MSE(After Adjustment) و $Med APE$ و MPE والمتقدم ذكرها في المبحث (4). فقد اختيرت عدة قيم لـ ϕ وهي $\phi = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ وقد استخدم الـ Matlab للحصول على قيمة

البواقي e_t وفقا لقيمة الثابت ϕ ثم استخدم تنبوء الـ EWMA للحصول على e_{t+1}^{\wedge} الذي يكون متوسط متحرك موزون اسيا مع عامل الاضمحلال $G = 1 - \phi$. بالاعتماد على قيم الاوزان المتقدم ذكرها في المبحث (7-1) ، ثم استخدمت المعادلة (13) في التعديل لقيم y_t^a ووفقا لما ورد في المبحث (5) -ثانيا. وقد لخصت النتائج في الجدول (2).

جدول (2) أجمالي اداء أنموذج (1) AR للاضطرابات Z_t لقيم مختلفة لمعلمة الانحدار الذاتي ϕ .

ϕ	$G = 1 - \phi$	MSE	Med APE	Med APE%	MPE	MPE%
0.0	1.0	51.240	0.0351	3.51	0.0323	3.23
0.1	0.9	43.616	0.0317	3.17	0.0298	2.98
0.2	0.8	36.998	0.0283	2.83	0.0279	2.79
0.3	0.7	31.384	0.0249	2.49	0.0234	2.34
0.4	0.6	26.774	0.0215	2.15	0.0220	2.20
0.5	0.5	23.170	0.0179	1.79	0.0204	2.04
0.6	0.4	20.570	0.0144	1.44	0.0211	2.11
0.7	0.3	18.974	0.0108	1.08	0.0202	2.02
0.8	0.2	18.386	0.0072	0.72	0.0196	1.96*
0.9	0.1	18.200	0.0035	0.35*	0.0209	2.09

ونلاحظ من الجدول اعلاه ماياتي :

- ان قيم MSE بعد التعديل تتناقص بزيادة قيمة ϕ ، اذ نلاحظ ان اصغر قيمة لـ $MSE=18.2$ عندما تكون قيمة $\phi=0.9$ والتي تناظر قيمة $G=0.1$.
 - ان قيم Med APE تتناقص بزيادة قيمة ϕ ، اذ نلاحظ ان اصغر قيمة لـ $Med APE=0.0035$ أو 0.35% عندما تكون قيمة $\phi=0.9$ والتي تناظر قيمة $G=0.1$.
 - ان اصغر قيمة لـ MPE تكون 0.0196 او 1.96% عندما تكون قيمة $\phi=0.8$ والتي تناظر قيمة $G=0.2$.
 - أن قيمة $MMSE=18.2$ تناظره قيمة $Med APE=2.09\%$ و $MPE=0.35\%$ عندما تكون قيمة $\phi=0.9$ والتي تناظر قيمة $G=0.1$.
- من خلال استخدام اسلوب نمذجة حد الاضطراب باستخدام الأنموذجين $IMA(1)$ و $AR(1)$. نلاحظ ان قيم $MMSE$ و $Med APE$ و MPE لأنموذج $IMA(1)$ تكون اقل من قيم نفس المقاييس المتقدم ذكرها باستخدام أنموذج $AR(1)$. وكما مبين في جدول (3). قد يكون السبب في ان استخدام أنموذج $AR(1)$ يكون ملائم لبيانات مستقرة، بخلاف البيانات الميينة في الشكل (1) .

جدول (3) مقارنة قيم MMSE و Med APE و MPE لأنموذجي IMA(1) و AR (1).

Model	parameter	Value	MMSE	Med APE%	MPE%
IMA (1)	θ	0.8299	11.113	1.71	0.32
AR (1)	ϕ	0.8087	18.382	1.94	0.69

4-7 الاخطاء المعدلة لعملية تحت السيطرة

في هذا المبحث ناقش تطبيق اسلوب التغذية العكسية وذلك بالتنبؤ باستخدام الـ EWMA وفقا لما ورد في المبحث (2-3) عندما تكون العملية تحت السيطرة بصورة تامة (مستقرة تامة) ، عندما تكون الاضطرابات مستقلة ومتطابقة التوزيع. وعندما تكون الاضطرابات مرتبطة ، وبهدف معرفة تأثير كل من الحالتين المتقدم ذكرها على قيمة المقياس MSE قبل وبعد التعديل. ولتوضيح ذلك ، تم توليد خمسة سلاسل زمنية من أنموذج AR(1) كل واحدة منها تتكون من 500 قيمة وكما يأتي :

- السلسلة الاولى $y_{1t} = v_{1t}$ ، $v_{1t} \sim N(0,1)$ وفي الحقيقة هي مجموعة من 500 قيمة مستقلة مولدة من توزيع طبيعي (.
- السلسلة الثانية $y_{2t} = 0.3y_{2,t-1} + v_{2t}$ ، $v_{2t} \sim N(0,1)$ (تكون أنموذج AR (1) مع معلمة $\phi = 0.3$).
- السلسلة الثالثة $y_{3t} = 0.5y_{3,t-1} + v_{3t}$ ، $v_{3t} \sim N(0,1)$ (تكون أنموذج AR(1) مع معلمة $\phi = 0.5$).
- السلسلة الرابعة $y_{4t} = 0.7y_{4,t-1} + v_{4t}$ ، $v_{4t} \sim N(0,1)$ (تكون أنموذج AR(1) مع معلمة $\phi = 0.7$).
- السلسلة الخامسة $y_{5t} = 0.9y_{5,t-1} + v_{5t}$ ، $v_{5t} \sim N(0,1)$ (تكون أنموذج AR(1) مع معلمة $\phi = 0.9$).

المشاهدات للسلسلة الاولى تكون غير مرتبطة مع بعضها ، اما المشاهدات للسلاسل الزمنية المتبقية تكون مرتبطة مع بعضها وتكون دالة الارتباط الذاتي ولكل سلسلة وعلى التوالي $\rho_K = (0.3)^K$ و $\rho_K = (0.5)^K$ و $\rho_K = (0.7)^K$ أما السلسلة الاخيرة فإن دالة الارتباط الذاتي تكون $\rho_K = (0.9)^K$ ، و $K = 1, 2, 3, \dots$ من الازاحات ولكل سلسلة. وهكذا فان السلسلة الخامسة $\{y_{5t}\}$ تكون قيمها مرتبطة جدا حتى لو استخدمت الازاحات الكبيرة (LagK). والاشكال (5,6,7,8,9) في الملحق تبين السلاسل الزمنية المتقدم ذكرها $\{y_{1t}\}$ ، $\{y_{2t}\}$ ، $\{y_{3t}\}$ ، $\{y_{4t}\}$ و $\{y_{5t}\}$ وعلى التوالي. عندما تكون قيمة الهدف لكل سلسلة من السلاسل الخمسة مساوية للصفر ($T=0$).

وقد تم تلخيص قيم الـ MSE بعد وقبل التعديل لكل سلسلة من السلاسل الزمنية الخمسة في الجدول (4) ، ونلاحظ بأنه عندما تكون قيمة $\phi = 0.0$ (عينة مستقلة من توزيع طبيعي) ، فان أصغر

MSE(After Adjustment)=1.145 وهي اعلى من قيمة MSE(before Adjustment)=1.091. مع ذلك عندما تكون السلسلة الزمنية مرتبطة فان قيمة MSE(After Adjustment) تكون دائما اقل من قيمة MSE(before Adjustment)، ويزداد التأثير بزيادة قيمة ϕ أي عندما تكون $\phi = 0.9$ انظر الجدول (4). اذ نلاحظ أن قيمة MSE(before Adjustment) = 5.223 تكون اقل من قيمة MSE(After Adjustment) = 1.113 عندما تكون قيمة $G=0.999$. كما نلاحظ ان القيمة المثلى لـ G والتي تعطي اصغر قيمة للـ MSE بعد التعديل تقترب من الواحد وهذا الاقتراب يعتمد على درجة الارتباط في السلسلة الزمنية. ونلاحظ ان القيمة المثلى لـ G مساوية لـ $G=0.5$ عندما تكون دالة الارتباط الذاتي $\rho_K = (0.5)^K$ ، في حين تكون القيمة المثلى لـ G مساوية لـ $G=0.8$ عندما تكون دالة الارتباط الذاتي $\rho_K = (0.7)^K$ والقيمة المثلى لـ G تكون $G=0.999$ عندما تكون دالة الارتباط الذاتي $\rho_K = (0.9)^K$. اذ نلاحظ ان قيمة G تتحرك من الـ 0.1 لتقترب من الواحد (0.999) وهذا الاقتراب يعتمد على درجة الارتباط الذاتي في السلسلة الزمنية، وهذا خلاف ما ذكر حول القيمة المثلى لـ G بانها تكون بين 0.1 و 0.4 في حالة تطبيق تعديل التغذية لعملية تكون خارج السيطرة.

جدول (4) تاثير تعديل التغذية العكسية المطبقة لعملية تكون تحت السيطرة بشكل تام ولدت باستخدام أنموذج سلسلة زمنية (1) AR ولقيم مختلفة للمعلمة النموذج $\phi = 0.0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

G		ϕ				
		0.0	0.3	0.5	0.7	0.9
MSE (After Adjustment)	0.1	1.145	1.126	1.261	1.842	2.813
	0.2	1.212	1.133	1.193	1.597	2.035
	0.3	1.287	1.147	1.155	1.425	1.675
	0.4	1.372	1.167	1.135	1.307	1.468
	0.5	1.470	1.193	1.127*	1.227	1.335
	0.6	1.582	1.226	1.129	1.176	1.243
	0.7	1.711	1.268	1.140	1.147	1.180
	0.8	1.861	1.321	1.162	1.139*	1.139
	0.9	2.035	1.389	1.195	1.147	1.117
	0.999	2.240	1.475	1.242	1.174	1.113*
MSE (befor Adjustment)		1.091*	1.101*	1.365	2.124	5.223

8. الأستنتاجات

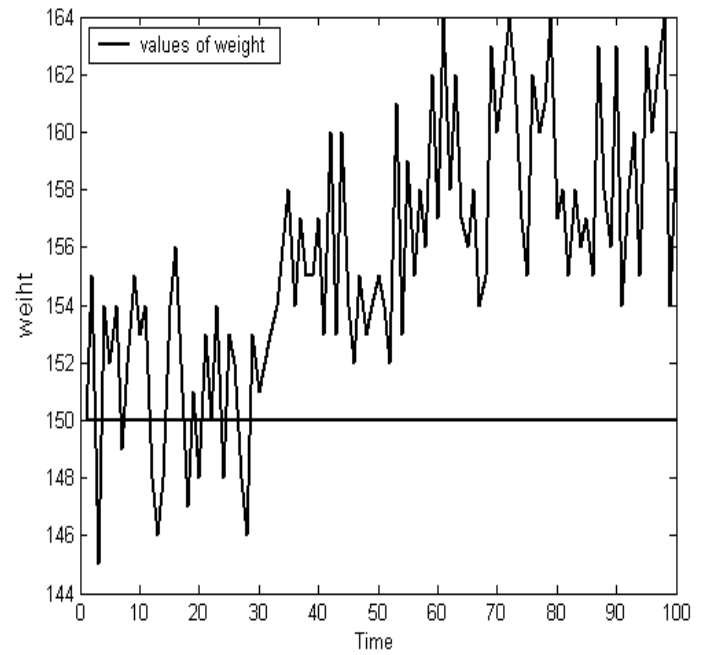
بهذا البحث نستعرض طرق تعديل التغذية العكسية مع استخدام الـ EWMA ونبين سهولة تطبيقها. تبين بان الاختيار للقيمة المثلى لعامل الاضمحلال G يجب ان يتم بعناية ، لان مقاييس التشتت المختلفة تعطي نتائج مختلفة. ان نمذجة الاضطرابات ربما يكون افتراض مفيد ، لكن يجب الحذر عند اختيار قيمة عامل الاضمحلال للأنموذج. اذ يجب ان نولي عناية كبيرة عند تطبيق تعديل التغذية العكسية للعمليات التي تكون تحت السيطرة بصورة تامة (حالة الاستقرارية). اذ كما تبين من خلال تنفيذ التجارب فان قيمة MSE بعد التعديل تتناقص كلما تزداد درجة الارتباط في البيانات للعملية تحت السيطرة ، بكلام اخر ، أن قيمة MSE بعد التعديل تكون اقل اذ كان الفرق كبير بين قيمة الـ MSE قبل وبعد التعديل.

References:

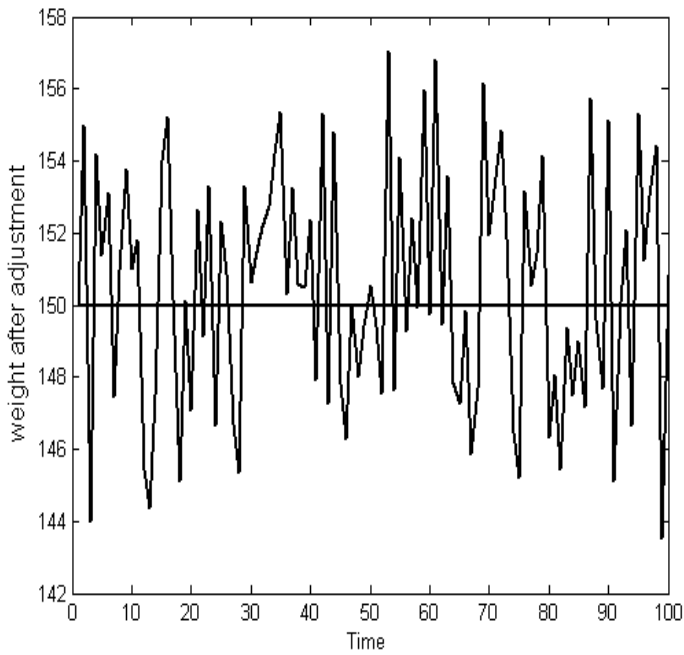
1. Box, G.E.P., Jenkins, G.M., and Reinsel, G.C. (1994) Time Series Analysis, Forecasting and Control. 3rd.ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Box, G.E.P. and Luceno, A. (1997) Statistical Control by Monitoring and Feedback Adjustment. Wiley, New York.
3. Chatfield, C. (1996) The Analysis of time series: An Introduction .5th ed. Chapman and Hall, New York.
4. Files, R. (1992) the evaluation of extrapolative forecasting methods. International Journal of Forecasting, 8, 69-80.
5. Joseph, V.R. (2003), "Robust Parameter Design With Feed-Forward Control", Technometrics , 45, 284-291.
6. Montgomery, D.C. (1996) Introduction to Statistical Quality Control. 3rd. ed. Wiley, New York.
7. Sachs, L. (1982) Applied Statistics. Springer- Verlag, New York.
8. Triantafyllopoulos , K. (2007), "On Feedback quality control with EWMA", The Mathematical Scientist . Issue 32.2(December, 2007).

الملحق

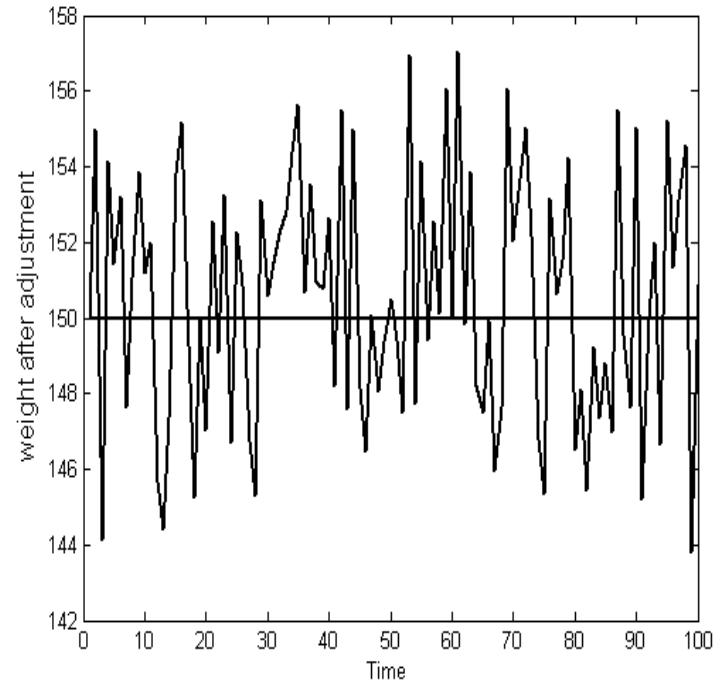
الشكل (1) يبين انتقالات الازان للمشبكات الرصاصية عن قيمة الهدف $T=100$ لعملية خارج السيطرة



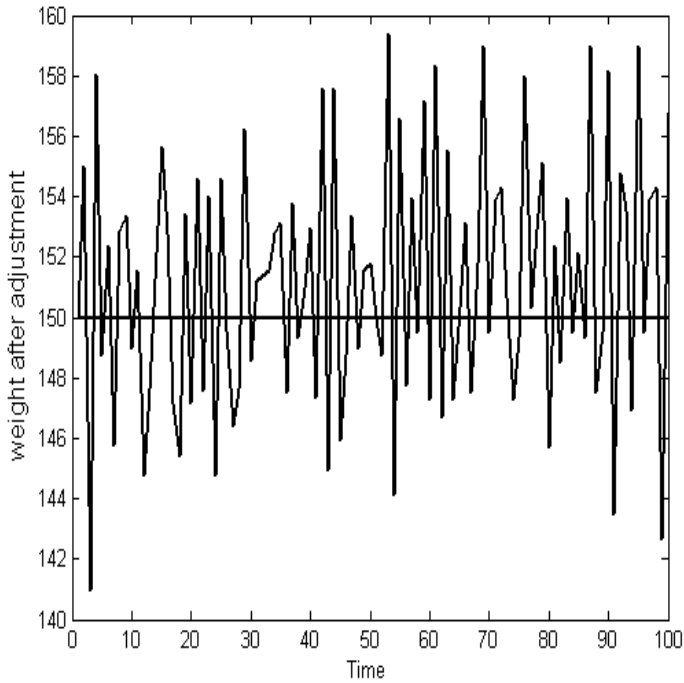
الشكل (2) القيم المعدلة لاوزان المشبكات الرصاصية عندما تكون قيمة $G=0.2$.



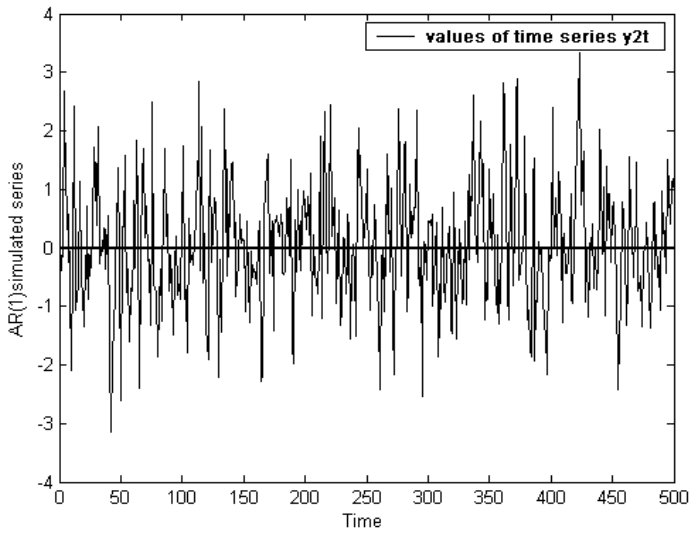
الشكل (3) يبين القيم المعدلة لاوزان المشبكات الرصاصية باستخدام $AR(1)$ للاضطرابات.



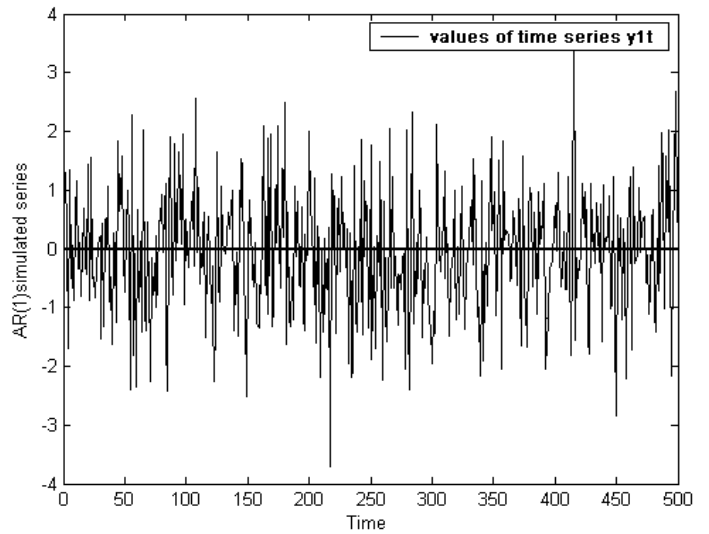
الشكل (4) يبين القيم المعدلة لاوزان المشبكات الرصاصية باستخدام نموذج $IMA(1)$ للاضطرابات.



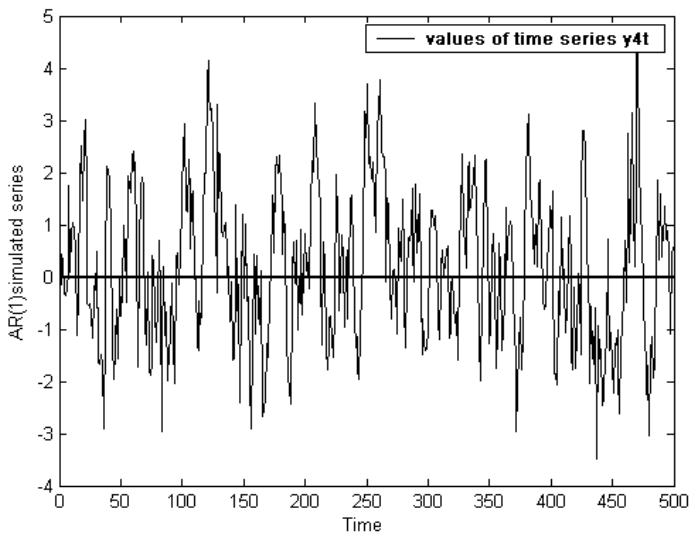
الشكل (6): السلسلة الثانية 500 قيمة مولدة من نموذج AR (1) مع معلمة $\varphi = 0.3$.



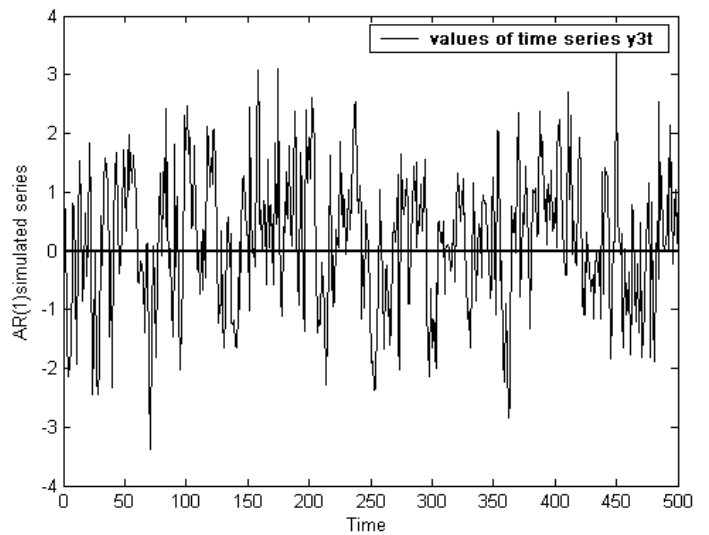
الشكل (5): السلسلة الاولى 500 قيمة مولدة من نموذج AR (1) مع معلمة $\varphi = 0.0$.



الشكل (8): السلسلة الثانية 500 قيمة مولدة من نموذج AR (1) مع معلمة $\varphi = 0.7$.



الشكل (7): السلسلة الاولى 500 قيمة مولدة من نموذج AR (1) مع معلمة $\varphi = 0.5$.



الشكل (9): السلسلة الخامسة 500 قيمة مولدة من نموذج AR (1) مع معلمة $\varphi = 0.9$.

