Diala, Jour, Volume, 37, 2009

التحيز في مرونة مقدرات الانحدار الخطي :
بعض النتائج التحليلية .

احمد سلطان القرة غولي
جامعة ديالى

باستخدام الاضطرابات الصغيرة التوسعات . سنشتق عبارات تحليلية للتحيز في مقدر المرونة بطريقة المربعات الصغرى (oLs) في النموذج الخطي ، سواء على الصعيد الفردي (sample point) ومتوسط العينة . كبر هذه التحيزات موضحة على بيانات النفقات الاسترالية .

Abstract

Using small disturbance expansions, we derive analytic expression for the bais of the oLs estimator of an elasticity in a linear model, both at an individual sample point and at the sample mean. The magnitudes of these biases are illustrated with Australian expenditure data.

1 المقدمة :

ان النموذج الخطي كثيرا ما يستخدم بتقدير المرونة بين متغيرات الفائدة عندما يكون النموذج خطي في المتغيرات والثوابت . تكون المرونة ومقدراتها دوال غير خطية للبيانات العشوائية . وبناء على ذلك فان هذه المقدرات تكون متحيزة في العينات المحدودة – وهي النقطة التي اهملت دائما في الممارسة العملية . هذا البحث يوضح حجم التحيز على وجه التحديد و لنفترض النموذج :

$$\mathbf{Y = X\beta + \sigma\mu} \quad \textbf{(1)}$$

حيث ان ($n \times k$) X غير عشوائية [0 , In] N ~ μ .

'i' مقدر المرونة بطريقة المربعات الصغرى (oLs) للمتغير y بالنسبة الى

المتغير المستقل الذي رتبته i يكون

$$\hat{\eta}_{ij} = \hat{\beta}_j \frac{x_{ij}}{y_i} \quad \textbf{(2)}$$

او اذاما كان لنا تقدير المرونة في متوسط العينة ،

$$\hat{\bar{\eta}}_i = \hat{\beta}_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} \quad (3)$$

حيث انه $\hat{\beta}_j$ مقدرات oLs β_j $(j = 1 , 2 \ldots , k)$ ، في حد ذاته هو دالة لبيانات y .

في أطار الظروف الخفيفة، فان هذه التقديرات متسقة. وللمزيد من الفائدة في العينات المحدودة ، التحيزات المضبوطة للمقدرات بالغة التعقيد ، وذلك لأنه (2) و (3) هي دوال غير خطية بالنسبة لبيانات y .

في الجزء التالي نناقش استخدام تقريب سيغما الصغيرة ، وعرض النتائج الرئيسية التي نستخدمها في الاشتقاقات ، ويعرض الجزء 3 نتائج النظرية الرئيسية ، وتفسير الآثار المترتبة عليها . أما الجزء الرابع فيوضح مثال على ذلك أما الجزء الخامس يتضمن الاستنتاجات.

2 تقريب الأظطرابات الصغيرة

ان التحيز في مرونة المقدرات يمكن أن يقترب بطرق مختلفة . احدها هو استخدام تقريب تحليلي يقوم على التوسع الذي يحسن (n) حجم العينة هكذا تقريب اقترحه (1959) Nagar في سياق اقتصادي ويشمل توسيع الخطأ ز انه في مثل هذه المصطلحات المتعاقبة تساعد على خفض احتمال ترتيب (n) .عندما نريد ايجاد العزوم لاي مقدر فان هذا الاجراء يؤدي الى عزوم (Edgeworth) لتوزيع ذلك المقدر (Ulah , 2004 , p.29) وكبديل مثل (Kadane . 1971) لتقريب عزوم العينات المحدودة للمقدر من خلال التوسع في خطأ المعاينة يجب ان يتم في فترات متتالية من اجل خفض احتمال الانحراف المعياري للمجتمع (σ) هذه الاضطرابات الصغيرة σ^2 الصغيرة هي تقريبية وقد تبين انها قيمة للغاية لعدد من المشاكل في الاقتصاد القياسي. وهي صالحة لأي حجم عينة وهي الانتاج الى افتراضات أضافية بشأن سلوك عزوم العينة من البيانات عندما يزداد حجم العينة (n)

في الآونة الاخيرة تمت مناقشة توسعات الاضطرابات الصغيرة , (Ulah , 2004, p. 36-45) .

دراسة عملية توليد البيانات .

$$y = \mu + \sigma_{\mu i} \qquad ; \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (4)$$

حيث ان $\mu \neq$ صفر

$\mu i's$ مستقلة ومتماثلة ولها توزيع بحيث ان :

$$E(\mu_i) = 0 \;;\; E(\mu_i^2) = 1 \;;\; \gamma_1 \;;\; E(\mu_i^4) = \gamma_{2+3} \qquad (5)$$
$$(\mu_i^3) =$$

بذلك فأن الالتواء والتفرطح لتوزيع المجتمع هي γ_1 و γ_2 . على التوالي هدفنا هو تحديد التحيز في مقدرات المرونة في (2) ، (3) تحت الافتراضات حول توزيع المجتع ، الى $O(\sigma^4)$. تستخدم النتيجة التالية :

ليما 1 (Ulah , 2004 , 38.)

ليكن 'y' متجه من (n) من العناصر العشوائية حيث ان $y = \mu + \sigma_{\mu}$ بحيث ان 'μ' يحقق الشرط في (5) اعلاه عندما المتوسط لا يساوي صفر ، μ ، داله لمتجه المعالم ، Θ . لتكن $\hat{\Theta} = h(y)$ هو تقدير لـ Θ بحيث انه $h(y)$ ومشتقاتها موجودة وبجوار μ . وعليه فان :

$$E(\hat{\Theta} - \Theta) = \sigma^2\Delta_2 + \sigma^3\gamma_1\Delta_3 + \sigma^4(\gamma_2\Delta_4 + 3\Delta_{22}) \qquad (6)$$

$$\Delta_s = \frac{1}{S!} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^s h(y)}{\partial y_k^s} \right)_{y=\mu} \qquad \text{عندما } s = 2, 3, 4$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{L=1}^{n} \left(\frac{\partial^4 h(y)}{\partial y_k^2 \partial y_L^2} \right)_{y=m}$$

3- النتائج

ألان نموذج (1) في ضل ظروف ليما 1 باستخدام معيار تقييم النتائج :

$$\hat{\beta}_j = (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} (x_j' M_{-j} y) \quad ; \quad j = 1 , 2 , 3 ,\ldots k \qquad (7)$$

حيث ان $M_{-j} = I - x_{-j} (x_{-j}' x_{-j})^{-1} x_{-j}'$

$x_j =$ العمود j من المصفوفة x

$x_{-j} =$ مصفوفة المتغيرات المستقلة باستثناء العمود x_j

3. المرونة في البيانات الفردية للنقاط

مقدرات المرونة بطريقة المربعات الصغرى (ols) للمتغير المعتمد (y) مع الاخذ بنضر الاعتبار x_j للمشاهدة ith يكون:

$$\hat{\eta}_{ij} = \hat{\beta}_j \frac{x_{ij}}{y_i} = x_{ij} (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} \frac{x_j' M_{-j} y_j}{y_i} = x_{ij} (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} h(y) \qquad (8)$$

$$h(y) = \frac{x_j' M_{-j} y}{y_i} = x_j' M_{-j} y^* \qquad (9)$$

$$y^* = \frac{y}{y_i} \qquad (10)$$

ثم ان σ الصغيرة هي تقريب مقارب لهذا التحيز في مرونة التقديرات.

نظرية (1)

$$\text{Bais}\,(\hat{\eta}_{ij}) = x_{ij}\,\{\sigma^2\,[\beta_j \sum_i (x_i'\beta)^{-3} - (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} \sum_i [(x_j' M_{-j} I_i)/(x_i\beta)^2]] - \sigma^3\gamma_1[\beta_j \sum_i (x_i'\beta)^{-4} - (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} \sum_i [(x_j' M_{-j} I_i)/(x_i'\beta)^3]] + \sigma^4 (\gamma^2+3)[\beta_j \sum_i (x_i'\beta)^{-5} - (x_j M_{-j}' x_j)^{-1} \sum_i [(x_j M_{-j} I_i)/(x_i\beta)^4]]\}$$

حيث ان:

$I_i(n \times 1)$ = هو عبارة عن عمود عنصره الذي رتبته i يكون مساويا للواحد وجميع العناصر الاخرى مساوية للصفر ويتم الجمع من 1 الى n.

البرهان:

من المعادلة (8)

$$\text{Bais}\,(\hat{\eta}_{ij}) = x_{ij}\,(x_j' M_{-j} x_j)^{-1}\,\text{Bias}\,[h(y)] \qquad (11)$$

ومن (9)

$$\frac{\partial^s h(y)}{\partial y_k^s} = x_j' M_{-j} \frac{\partial^s y^*}{\partial y_k^s} \qquad (12)$$

وهذا يبعث على الملل ولكن بعض التفاضل الجزئي يعطي بعض النتائج عندما s=2,3,4,…

$$\frac{\partial^s h(y)}{\partial y_k^s} = (-1)^s (s!)[x_j' M_{-j}(y - y_k i_k)]/y_k^{S+1}; \quad k=i$$
$$= 0 \qquad ; k \neq i$$
$$\frac{\partial^4 h(y)}{\partial y_k^2 \partial y_i^2} = (4!)[x_j' M_{-j}(y - y_k i_k)]/ y_k^5 \qquad ; i=k=I$$
$$= 0 \qquad ;\ \text{فيما عدا ذلك}$$

من ليما 1 وبالاشارة الى ان $E(y_i) = x_i\beta\,(i=1,2,3,\ldots,n)$

$$\Delta_s = (-1)^s\,\{(x_j' M_{-j} x_j \beta_j) \sum (x_k'\beta)^{-(s+1)} - \sum [(x_j' M_{-j} i_k)/(x_k'\beta)^s]\}\ ;\ \Delta_{22} = \Delta_4$$ و

ل s=2,3,4

واخيراً لتطبيق ليما 1 ولمعادلة 11 يمكن الوصول الى النتيجة مباشرة من نظرية 1 فأن حجم التحيز يكون غير محدد.

نتيجة (1)

اذا كان النموذج يحتوي على متغير مستقل واحد وتركيبها من خلال الاصل فأن التحيز في مرونة المقدرات لاي مشاهدة يكون :

$$\text{Bais}\,(\hat{\eta}_{ij}) = x_i\Big[\frac{\sigma^2}{\beta^2}\Big(\sum_i \frac{1}{x_i^3} - \sum_i \frac{1}{x_i}\Big/\sum x_i^2\Big) - \frac{\sigma^3\gamma_1}{\beta^3}\Big(\sum_i \frac{1}{x_i^4} - \sum_i \frac{1}{x_i^2}\Big/\sum x_i^2\Big) +$$

$$\frac{\sigma^4(\gamma_{2+3})}{\beta^4}\Big(\sum_i \frac{1}{x_i^5} - \sum_i \frac{1}{x_i^3}\Big/\sum_i x_i^2\Big)$$

ومرة اخرى فأن التوقع وحجم التحيز غير محدد ، وبشكل عام وباستخدام متباينة هوليدر (Kendall and stuart ،1977 ،p39) للمتغيرات المستقلة الموجبة يكون التحيز موجب بالنسبة الى $O(\sigma^2)$ وكذلك موجبة بالنسبة الى $O(\sigma^4)$ للبيانات المتماثلة

3.2 المرونة على متوسط العينة

نظرية (1) تتيح لنا التحيز للمرونة بالنسبة لتغير مستقل لاي مشاهدة وفي الممارسة العملية لحساب المرونة على متوسط حجم العينة في (13) هذه الحالة يكون لدينا:

$$(\hat{\bar{\eta}}_{ij}) = \hat{\beta}_j \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}} = \bar{x}_j\,(x_j'M_{-j}x_j)^{-1}\frac{(x_j'M_{-j}y)}{\bar{y}} = \bar{x}_j\,(x_j'M_{-j}x_j)^{-1}\,g(y)$$

$$g(y) = \frac{(x_j'M_{-j}y)}{\bar{y}} = x_j'M_{-j}y^* \qquad (14)$$

$\bar{y}$

$$y^{*} = \overline{\quad y \quad} \qquad (15)$$

نظرية (2)

$$\text{Bais}\,(\hat{\bar{\eta}}_{ij}) = \bar{x}_j\,[\beta_j - (\bar{x}\beta)\,\frac{(x_j' M_{-j} i)}{(x_j' M_{-j} x_j)^{-1}}\,]\,[\frac{\sigma^2}{n(\bar{x}\beta)^3} - \frac{\sigma^3 \gamma_1}{n^2(\bar{x}\beta)^4} + \frac{\sigma^4(\gamma_2+3n)}{n^3(\bar{x}\beta)^5}]]$$

حيث ان $i_{(nx1)}$ عمود متجه

البرهان : من المعادلة (13)

$$\text{Bais}\,(\hat{\bar{\eta}}_{ij}) = \bar{x}_j\,(x_j' M_{-j} x_j)^{-1}\,\text{Bais}\,[g(y)] \qquad (16)$$

For s = 2,3,4,…

$$\frac{\partial^s g(y)}{\partial y^s_k} = (-1)^s\,(s!)[x_j'\,M_{-j}(y - n\bar{y} i_k)\,] \Big/ n^s \bar{y}^{(s+1)}$$

$$\frac{\partial^4 g(y)}{\partial y^2_k \partial y^2_l} = (4!)[x_j'\,M_{-j}(y - 0.5n\bar{y}_{ik} - 0.5n\bar{y}_{il})] \Big/ n^4 y^{-5} \quad ; \quad k \neq l$$

$$= (4!)[x_j'\,M_{-j}(y - n\bar{y}_{il})] \Big/ n^4 y^{-5} \quad ; \quad k = l$$

$$\Delta_s = (-1)^s[(x_j'\,M_{-j} x_j \beta_j) - (\bar{x}\beta) \sum_k (x_j' M_{-j} i_k)] \Big/ n^{s-1} (\bar{x}\beta)^{s+1}$$

$$\Delta_{22} = [(x_j'\,M_{-j} x_j \beta_j) - (\bar{x}\beta) \sum_k (x_j' M_{-j} i_k)] \Big/ n^2 (\bar{x}\beta)^5$$

-

حيث ان $x_{(1xk)}$ = متجه صفي عنصره الذي برتبة i يمثل المتوسط للعمود i من المصفوفة x.

واخيرا بتطبيق ليما (1) والمعادلة (16) يمكن الحصول على النتيجة من نظرية (2) مباشرة.

نتيجة (2)

اذا كان النموذج يحتوي على متغير مستقل واحد وتركيبها من خلال الأصل فان التحيز في مرونة المقدرات في متوسط العينة يكون:

$$\mathbf{Bais}\ (\hat{\bar{\eta}}_{ij}) = \left(\frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{\sum_i x_i^2} \right) \left[\frac{\sigma^2}{n\beta^2} - \frac{\sigma^3\gamma_1}{n^2\bar{x}\beta^3} + \frac{\sigma^4(\gamma_2+3n)}{n3\bar{x}^2\beta^4} \right]$$

لتفسير هذه النتيجة أولاً باستخدام متباينة جينز.

$$\bar{x}^2 \leq \sum x_i^2/n$$

لذلك فأن $O(\sigma^2)$ وبغض النضر عن توزيع الاخطاء فأن مقدار المرونة متميز صعوداً وكافي ولكن ليس ضروريا ليكون $O(\sigma^4)$ متميز صعوداً.

بالنسبة الى $O(\sigma^4)$ يكون

$$1 + \frac{\sigma^2(\gamma_2+3n)}{n^2\bar{x}^2\beta^2} > \frac{\sigma\gamma_1}{n\bar{x}\beta}$$

اذا كان المتغير المستقل يأخذ فقط فيما موجبه والاخطاء متماثلة التوزيع يكون التمز

$$\mathbf{Bais}\ (\hat{\bar{\eta}}_{ij}) > 0$$

بالنسبة الى $O(\sigma^4)$

4. مثال توضيحي

لتوضيح هذه النتائج لدينا تقديرات لمنحنيات انجل الخطية للمشروبات الكحولية والمارجونا وذلك باستخدام بيانات من استراليا التي استخدمت من قبل (Clements and Zhao,2005) الأنفاق على كل سلعة موضح بالانفاق على كل مجموعة من البضائع.

المرونة مقدرة بطريق المربعات الصغرى (OLS) والنسبة المئوي ة للتحيز كما في الجدول رقم (1) وان التحيز في المرونة يتراوح بين صفر % الى 10% لافراد العينة ولكن لايعتمد بها لتقييم مرونة متوسط العينة حيث ان التحيز في تقدير $O(\sigma^2)$ قريب جدا من التحيز $O(\sigma^4)$ وهذه علامات ايجابية تعكس جزئيا البيانات ومعامل الانحدار للتقديرات.

5. الاستنتاجات.

لقد قمنا باشتقاقات للتحيز في مقدار المرونة بطريق المربعات الصغرى (OLS) للمرونة النقطية في النموذج الخطي ، سواء على الصعيد الفردي للعينة و متوسط العينة هذه الاشتقاقات هي على أساس الاضطرابات الصغيرة التوسعات. وان هذه التحيزات يمكن ان تكون كبيرة بما يكفي لتبرير الاهتمام بها من الناحية العلمية لاسيما في حالة مرونة نقطة معينة.

جدول رقم (1)

مقدرات المرونة والتحيز

السلعة	(أ)			(ب)		
السنة	المرونة	التحيز		المرونة	التحيز	
		$O(\sigma^2)$	$O(\sigma^4)$		$O(\sigma^2)$	$O(\sigma^4)$
1988	0.6760	0.0744	0.0743	1.4234	3.6568	3.7783
1989	0.6868	0.0774	0.0773	1.4977	3.6772	3.7094
1990	0.6852	0.0814	0.0813	1.6239	3.5513	3.6693
1991	0.6991	0.0824	0.0823	1.6449	3.6255	3.7460
1992	0.7007	0.0802	0.0801	1.5507	3.7538	3.8788
1993	0.6982	0.0804	0.0803	1.5099	3.8563	3.9848
1994	0.7056	0.0817	0.0816	14.4804	4.0455	4.1805
1995	0.6967	0.0836	0.0835	1.4371	4.2166	4.3576
1996	0.7072	0.0862	0.0861	1.4257	4.4607	4.6102
1997	0.7167	0.0874	0.0873	1.3696	4.7863	4.9473
1998	0.7333	0.0878	0.0877	1.3507	4.9964	5.1647
المتوسط	0.7011	0.0006	0.0066	1.4784	0.0257	0.0258

السلعة	(ج)			(د)		
السنة	المرونة	التحيز		المرونة	التحيز	
		$O(\sigma^2)$	$O(\sigma^4)$		$O(\sigma^2)$	$O(\sigma^4)$
1988	2.5389	5.4676	5.7492	0.5653	3.4044	3.2512
1989	2.4314	6.0742	6.3890	0.5486	3.7219	3.5540
1990	2.4268	6.4001	6.7328	0.5298	4.0536	3.8702
1991	2.5241	6.3563	6.6866	0.5061	4.3997	4.1999
1992	2.3772	6.5941	6.9376	0.5308	4.0770	3.8925
1993	2.0773	7.6130	8.0135	0.5757	3.7447	3.5757
1994	1.9807	8.2451	8.6815	0.5885	3.7612	3.5914
1995	1.9640	8.4130	8.8591	0.6123	3.6477	3.4832
1996	2.0035	8.6546	9.1145	0.5956	3.9379	3.7588
1997	1.9886	8.9874	9.4666	0.6013	4.0108	3.8293
1998	1.9518	9.4478	9.9538	0.5942	4.1764	3.9871
المتوسط	2.1694	0.0425	0.0427	0.5671	0.0260	0.0260

ملاحظة: (المتوسط) يعني متوسط القيمة.

المصادر

1. **Clements, K. W. Zhao X. , 2005 Economic aspects of Marijuana. Invited address, Economic Ph.D Conference, University of Western Australia.**
2. **Kendall, M., Stuart, A., 1977, The adrnced Theory of Statistics. Charles Griffin, London.**
3. **Nagar A.L., 1959 The bias and moments matrix of general K-class estimators of the parameters in structural equations. Econometrica 27, 575-595.**
4. **Kadane J.,1971 Comparison of K-class estimators when the disturbance are small. Econometrica 39, 723-737.**
5. **Ullah. A., 2004 Finite sample Econometrics. Oxford university press, Oxford.**