Comparison Between Standard Bayes Method and Maximum Likelihood Method for Estimation the Reliability of Series System By Using the Simulation

مقارنة بين طريقة بيز القياسية وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير معولية النظام المتسلسل باستخدام المحاكاة

أ.صباح هادي الجاسم
جامعة بغداد - كلية الإدارة والاقتصاد

علي حميد يوسف السراي
جامعة بغداد – كلية الإدارة والاقتصاد

المستخلص

في هذا البحث تم تقدير دالة المعولية لنظام مؤلف من m من المركبات المستقلة المربوطة بشكل متسلسل والتي لها توزيع أسي بمعلمات مختلفة ($\lambda_{i\,,}\ i = 1,2,\dots,m$) وتم استعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز القياسية في التقدير . وقد تم توظيف أسلوب المحاكاة (Simulation) بطريقة مونت كارلو (Monte Carlo) للمقارنة بين الطريقتين بغية الوصول إلى أفضل طريقة للتقدير . وتوصل البحث إلى أفضلية طريقة بيز القياسية بالمقارنة مع الطريقة الأخرى في التقدير ولجميع حجوم العينات .

ABSTRACT

In this research an estimation of reliability function for a series system consist m independent components, which have an exponential distribution with different Parameters ($\lambda_{i\,,}\ i = 1,2,\dots,m$). Standard Bayes method and maximum likelihood method are used in estimation . Simulation results shown that Standard Bayes Method is the best method with compare the other method in estimation for all samples size.

1 - المقدمة [5] Introduction

إن المعولية هي مقياس لقابلية أو قدرة إي جزء من أجزاء نظام معين أو النظام ككل على العمل بصلاحية تامة من دون توقف عند تشغيله مدة زمنية معينة في ظل ظروف عمل غير متوقعة .وبعبارة أخرى تعرف بأنها احتمال بقاء مركبة في نظام معين عاملة بعد الزمن t ، فإذا رمزنا لدالة المعولية بالرمز $R(t)$ فان :-

$$R(t) = p(X > t) \quad , t \geq o$$

$$= \int_{t}^{\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

إذ أن :

$f(x)$: - تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي X.

لتكن $F(t)$ تمثل دالة الكثافة التجميعية (c.d.f) للمتغير العشوائي X، إذ يكون لدينا :

$$F(t) = p(X \leq t)$$

$$= \int_{0}^{t} f(x)dx \qquad (2)$$

$$= 1 - \int_{t}^{\infty} f(x)dx$$

$$= 1 - R(t) \qquad (3)$$

2-هدف البحث Purpose of Search

يهدف هذا البحث إلى المقارنة بين طريقة بيز القياسية وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير معولية النظام المتسلسل باستعمال المحاكاة بغية الوصول إلى أفضل طريقة من بين الطرائق المشار إليها لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل .

3-معولية النظام المتسلسل[2] Reliability of Series System

نفرض أن لدينا نظام S مؤلف من m من المركبات وهذه المركبات مربوطة بشكل متسلسل، بحيث أن النظام يتوقف عن العمل أذا توقفت إحدى مركباته عن العمل، وبفرض إن أوقات الحياة لكل مركبة تتوزع توزيعاً أسياً بمعلمة $(\lambda_i, i = 1,2, \dots, m)$ علماً إن أوقات الحياة لكل مركبة مستقلة وبدالة كثافة احتمالية كالأتي :-

$$f(x, \lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x} \quad , \qquad x \geq 0, \quad \lambda_i > 0 \qquad (4)$$

آذ أن :

X_i : يمثل وقت حياة المركبة i

λ_i : تمثل دالة المخاطرة للمركبة i

أن معولية كل مركبة هي كالأتي:-

$$R_i(t) = p(X_i > t) = \int_t^{\infty} f(x_i)\,dx_i$$

$$= \int_t^{\infty} \lambda_i\, e^{-\lambda_i x_i} dx_i$$

$$= e^{-\lambda_i t} \qquad (5)$$

وتكون دالة المعولية للنظام المتسلسل هي كما يلي:-

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{m} R_i(t)$$

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda_i t}$$

$$R_S(t) = e^{-t\sum_{i=}^{m} \lambda_i} \qquad (6)$$

4- طرائق تقدير معولية الأنظمة

Methods 0f Estimation for the Reliability of Series System

لغرض تقدير معولية النظام المتسلسل سوف نتطرق إلى طريقة الإمكان الأعظم وهي من الطرائق التقليدية (Classical Methods) الشائعة التي لا توظف المعلومات الأولية حول المعلمات في عملية التقدير وطريقه أخرى في التقدير توظف هذه المعلومات بشكل توزيع احتمالي أولي للمعلمات العشوائية وهذه الطريقة هي طريقة بيز(Bayes Method).

4-1-طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method (MLE)[3][4]

تعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق المهمة في عملية التقدير لما تتمتع به من خصائص عديدة تميزها عن سائر الطرائق الأخرى وأحدى هذه الخصائص هي خاصية الثبات (Invariance Property) .

ولغرض توضيح فكرة التقدير سوف نبدأ بتقدير دالة المعولية لمركبتين مربوطتين بشكل متسلسل وكالاتي:-

ليكن المتغير العشوائيX_{ij} يشير إلى وقت حياة المركبة i والتي لها j من المشاهدات ($j=1,2,\ldots,n_i$, $i=1,2$) فان :

{ X_{1j} , X_{2j}} متغيران عشوائيان يمثلان أوقات حياة كل من المركبة الأولى والثانية .

ويمكن وضع دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X_{ij} كالأتي:-

$$f(x_{ij},\lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x_{ij}} \; , x_{ij} \geq 0 \; , \lambda i > 0$$

عليه تكون دالة الإمكان للمشاهدات كالأتي:-

$$L = \prod_{i=1}^{2} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} \boldsymbol{\lambda_i e^{-\lambda i x_{ij}}} \right\}$$

إذ يكون لدينا:

$$\boldsymbol{L} = \prod_{i=1}^{2} \{ \; \boldsymbol{\lambda_i^{n_i}} \quad \boldsymbol{e^{-\lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}} \; \}$$

$$\boldsymbol{L} = \; \boldsymbol{\lambda_1^{n_1}} \; \boldsymbol{e^{-\lambda_1 \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}}} \quad \boldsymbol{\lambda_2^{n_2}} \; \boldsymbol{e^{-\lambda_2 \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}}} \qquad (7)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين لجعل المعادلة أعلاه خطية نجد أن :-

$$\boldsymbol{LnL = n_1 Ln\, \lambda_1 - \lambda_1 \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} + n_2 Ln\, \lambda_2 - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}} \qquad (8)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة LnL بالنسبة إلى $\boldsymbol{\lambda_2, \lambda_1}$ نحصل على معادلتي الامكان الاتييتين :-

$$\boldsymbol{\frac{\partial LnL}{\partial \lambda_1} = \frac{n_1}{\lambda_1} - \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}} \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial LnL}{\partial \lambda_2} = \frac{n_2}{\lambda_2} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}} \qquad (10)$$

وبمساواة المعادلتين $(\boldsymbol{9})$و$(\boldsymbol{10})$ للصفر نجد ان :-

$$\boldsymbol{\frac{n_1}{\hat{\lambda}_1} - \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{n_2}{\hat{\lambda}_2} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j} = 0}$$

نجد إن مقدر الإمكان الأعظم للمعلمتين $\boldsymbol{\lambda_2, \lambda_1}$ هي على الترتيب الاتي :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n_1}{\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}} = \frac{1}{\overline{x_1}}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{n_2}{\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}} = \frac{1}{\overline{x_2}}$$

ويكون مقدر الإمكان الأعظم لدالة المعولية للنظام المتسلسل هو كالأتي:-

$$\hat{R}_{SML}(t) \quad = e^{-(\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2)t}$$

$$\hat{R}_{SML}(t) \quad = e^{-(\frac{1}{\overline{x_1}}+\frac{1}{\overline{x_2}})t} \qquad (11)$$

2-4- طريقة بيز القياسية [1][3] Standard Bayes Method

تعتمد هذه الطريقة على افتراض إن المعلومات الأولية المتوفرة حول المعلمة المراد تقديرها يمكن صياغتها على شكل دالة يطلق عليها دالة الكثافة الاحتمالية الأولية (Prior p.d.f) وهي تعبر عن درجة معرفتنا حول هذه المعلمة . وبأتباع أسلوب الباحث [Jeffery] في تحديد دالة الكثافة الاحتمالية الأولية لهذه المعلمة وكما يأتي :

بما إن مجال تعريف كلا من λ_2, λ_1 هو مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة فان الدالة الاولية لكلا منهما بحسب اسلوب الباحث (Jeffery) ستكون بحسب الصيغتين الآتيتين:

$$g_1(\lambda_1)\alpha\ \frac{1}{\lambda_1} \qquad (12)$$

$$g_2(\lambda_2)\alpha\ \frac{1}{\lambda_2} \qquad (13)$$

وتكون الدالة الاحتمالية الأولية المشتركة للمعلمتين العشوائيتين λ_2, λ_1 هي بالصيغة الاتية:-

$$g\ (\lambda_1, \lambda_2)\ \alpha\ \ g_1(\lambda_1) g_2(\lambda_2)$$

إذ يكون لدينا :

$$g(\lambda_1, \lambda_2)\ \alpha\ \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \qquad (14)$$

بالرجوع إلى دالة الإمكان للمشاهدات(7) الآتية:-

$$L = \lambda_1^{n_1}\ e^{-\lambda_1 \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}}\ \ \lambda_2^{n_2}\ e^{-\lambda_2 \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}}$$

وباستخدام صيغة بيز العكسية (Bayes Inversion Formula) فان الدالة الاحتمالية اللاحقة للمعلمتين λ_2, λ_1 تكون بالصيغة الآتية:-

$$h(\lambda_1, \lambda_1 / X_1, X_2) \;\alpha\; \lambda_1^{n_1-1} \;\; \lambda_2^{n_2-1} \; e^{-\lambda_1 T1} \; e^{-\lambda_2 T2}$$

حيث إن:

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}), X_2 = (x_{21}, x_{12}, \dots, x_{2n_2}),$$

وان

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \qquad , \quad T_2 = \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}$$

عليه فان :

$$h(\lambda_1, \lambda_2 / X_1, X_2) = C \; \lambda_1^{n_1-1} \;\; \lambda_2^{n_2-1} \; e^{-\lambda_1 T1} \; e^{-\lambda_2 T2} \tag{15}$$

حيث أن

C:- هو ثابت التناسب ويمثل التوزيع الحدي المشترك للمتغيرين العشوائيين X_1 , X_2 ويحسب بالصيغة الآتية :-

$$C^{-1} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda_1^{n_1-1} \;\; \lambda_2^{n_2-1} \; e^{-\lambda_1 T1} \; e^{-\lambda_2 T2} \; d\lambda_1 \lambda_2$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_2^{n_2-1} \; e^{-\lambda_2 T2} \left[\int_0^{\infty} \lambda_1^{n_1-1} e^{-\lambda_1 T1} \, d\lambda_1 \right] d\lambda_2$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_2^{n_2-1} \; e^{-\lambda_2 T2} \left[\frac{\Gamma(n_1)}{T1^{n_1}} \right] d\lambda_2$$

$$C^{-1} = \frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}{T1^{n_1} \, T2^{n_2}}$$

$$C = \frac{T1^{n_1} \, T2^{n_2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}$$

وباستعمال دالة الخسارة التربيعية (Square Error Loss Function) الآتية:-

$$L\left(\hat{R}_s(t) , R_s(t) \right) = (\hat{R}_s(t) - R_s(t))^2 \tag{16}$$

فان مقدر بيز $\hat{R}_s(t)$ لمعولية النظام $R_s\,(t)$ ما هو الا توقع التوزيع اللاحق (Posterior Mean) لمعولية النظام ويمكن أتباع الاتي من الخطوات للوصول إلى مقدر بيز القياسي.

$$\hat{R}_{SB}\,(t) \;=E[\;\; R_S(t)/X_1, X_2] \qquad\qquad (17)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} R_s(t)\;\; h(\lambda_1, \lambda_1/X_1, X_2)d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$=C\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \lambda_1^{n_1-1}\;\; \lambda_2^{n_2-1}\; e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\; e^{-\lambda_1 T_1}\;\; e^{-\lambda_2 T_2}\;\; d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$=C\int_0^{\infty} \lambda_2^{n_2-1}\; e^{-\lambda_2(t+T_2)}\left[\int_0^{\infty} \lambda_1^{n_1-1}\;\; e^{-\lambda_1(t+T_1)}\;\; d\lambda_1\right]d\lambda_2$$

$$=C\int_0^{\infty} \lambda_2^{n_2-1}\; e^{-\lambda_2(t+T_2)}\left[\;\frac{\Gamma(\,n_1)}{(t+T_1)^{n_1}}\right]d\lambda_2$$

$$=C\;\frac{\Gamma(\,n_1)\Gamma(\,n_2)}{(t+T_1)^{n_1}(t+T_2)^{n_2}} \qquad\qquad (18)$$

وبالتعويض عن قيمة C بما يساويها في المعادلة (18) نجد إن :

$$\hat{R}_{SB}\,(t) \;\;=\frac{{T_1}^{n_1}{T_2}^{n_2}}{(t+T1)^{n_1}(t+T2)^{n_2}}$$

$$=\left(\frac{t+T_1}{T_1}\right)^{-\,n_1}\left(\frac{t+T_2}{T_2}\right)^{-\,n_2}$$

$$\widehat{R}_{SB}\;\,(t)=\left(\,1+\,\frac{t}{T_1}\right)^{-\,n_1}\;\left(\,1+\,\frac{t}{T_2}\right)^{-\,n_2} \qquad\qquad (19)$$

وصف مراحل تجارب المحاكاة للنظام المتسلسل5-

تم تكوين تجارب محاكاة باستخدام لغة البرمجة (Visual Basic) والهدف منها المقارنة بين طريقة بيز القياسية وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير معولية النظام المتسلسل وبحجوم تكرار (1000) وقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل الآتية :

المرحلة الأولى:

n	Time	ML	Bayes	Best

وهي مرحلة اختيار القيم الافتراضية ، إذ تعد من المراحل المهمة التي تعتمد عليها المراحل الأخرى ، وقد تم اختيار القيم الافتراضية كالأتي:

جدول (1)
يبين القيم الافتراضية للمعلمات والتجارب المختلفة

Experiment	λ_1	λ_2
1	0.03	0.07
2	0.05	0.09
3	0.08	0.1

2 بالنسبة لحجوم العينات المفترضة هي كالأتي:
n =10 , 20 , 50 , 100

<u>المرحلة الثانية:</u>

توليد بيانات وفق التوزيع الآسي (Exponential Distribution) وحسب الصيغة الآتية :

$$\mathbf{x} = \frac{-1}{\lambda} \log(1 - \mathbf{u}) \qquad (20)$$

إذ إن :

u : يمثل المتغير العشوائي المستمر المنتظم على الفترة (0,1) ويتم توليده باستعمال الحاسبة الالكترونية وفق الصيغة الآتية :

$$\mathbf{u} = \mathrm{RND}(1) \qquad (21)$$

<u>المرحلة الثالثة:</u>

10	2	2.33E-03	2.23E-03	Bayes
	4	6.69E-03	6.21E-03	Bayes
	6	8.07E-03	7.34E-03	Bayes
	8	8.52E-03	7.58E-03	Bayes
	10	7.88E-03	7.02E-03	Bayes
20	2	9.99E-04	9.78E-04	Bayes
	4	2.56E-03	2.46E-03	Bayes
	6	3.23E-03	3.09E-03	Bayes
	8	4.16E-03	3.92E-03	Bayes
	10	4.25E-03	3.97E-03	Bayes
50	2	3.37E-04	3.34E-04	Bayes
	4	9.14E-04	9.00E-04	Bayes
	6	1.30E-03	1.27E-03	Bayes
	8	1.57E-03	1.53E-03	Bayes
	10	1.61E-03	1.57E-03	Bayes
100	2	1.63E-04	1.63E-04	Bayes
	4	4.33E-04	4.30E-04	Bayes
	6	6.22E-04	6.17E-04	Bayes
	8	7.31E-04	7.21E-04	Bayes

Bayes	7.85E-04	7.94E-04	10	

في هذه المرحلة يتم تقدير دالة معولية النظام المتسلسل والمبينة في الجانب النظري وحسب صيغ طرائق التقدير الآتية :-

طريقة الإمكان الأعظم وفقاً للصيغة (11)

طريقة بيز القياسية وفقاً للصيغة (19)

<u>المرحلة الرابعة:</u>

ويتم في هذه المرحلة المقارنة بين الطريقتين ،حيث يتم استخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) والمعطى بالصيغة الآتية :

$$MSE\left(\hat{R}_S(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(\hat{R}_{S_i}(t) - R_S(t)\right)^2 \qquad (22)$$

i=1,2,...,L

إذ إن :

L:- يمثل عدد التكرارات (Replications)

جدول (2)

يبين متوسط مربعات الخطأ(MSE) لتقدير معولية النظام المتسلسل بجميع الطرائق وحجوم العينات للتجربة الأولى

جدول (3) يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير معولية النظام المتسلسل
جميع الطرائق وحجوم العينات

N	Time	ML	1Bayes	Best
10	2	4.66E-03	4.37E-03	Bayes
	4	8.66E-03	7.88E-03	Bayes
	6	7.71E-03	6.99E-03	Bayes
	8	5.80E-03	5.23E-03	Bayes
	10	4.07E-03	3.85E-03	Bayes
20	2	2.03E-03	1.97E-03	Bayes
	4	3.64E-03	3.47E-03	Bayes
	6	3.41E-03	3.24E-03	Bayes
	8	2.99E-03	2.83E-03	Bayes
	10	2.23E-03	2.13E-03	Bayes
50	2	7.09E-04	7.01E-04	Bayes
	4	1.32E-03	1.30E-03	Bayes
	6	1.35E-03	1.32E-03	Bayes
	8	1.22E-03	1.20E-03	Bayes
	10	9.05E-04	8.93E-04	Bayes
100	2	3.38E-04	3.36E-04	Bayes
	4	6.45E-	6.39E-	Bayes

يبين متوسط (MSE) لتقدير المتسلسل وحجوم العينات للتجربة الثانية

مربعات الخطأ معولية النظام بجميع الطرائق للتجربة الثانية

		04	04	
	6	6.80E-04	6.75E-04	Bayes
	8	5.66E-04	5.58E-04	Bayes
	10	4.49E-04	4.47E-04	Bayes

N	Time	ML	1Bayes	Best
10	2	3.56E-03	3.37E-03	Bayes
	4	8.24E-03	7.55E-03	Bayes
	6	8.49E-03	7.67E-03	Bayes
	8	7.52E-03	6.68E-03	Bayes
	10	6.06E-03	5.50E-03	Bayes
20	2	1.54E-03	1.50E-03	Bayes
	4	3.30E-03	3.16E-03	Bayes
	6	3.58E-03	3.40E-03	Bayes
	8	3.81E-03	3.58E-03	Bayes
	10	3.32E-03	3.11E-03	Bayes
50	2	5.30E-04	5.24E-04	Bayes
	4	1.20E-03	1.17E-03	Bayes
	6	1.44E-03	1.41E-03	Bayes
	8	1.50E-03	1.46E-03	Bayes
	10	1.30E-03	1.27E-03	Bayes

100	2	2.55E-04	2.54E-04	Bayes
	4	5.74E-04	5.69E-04	Bayes
	6	7.03E-04	6.97E-04	Bayes
	8	6.97E-04	6.87E-04	Bayes
	10	6.47E-04	6.40E-04	Bayes

جدول (4)
يبين متوسط مربعات الخطأ(MSE) لتقدير معولية النظام المتسلسل بجميع الطرائق وحجوم العينات للتجربة الثالثة

6- الاستنتاجات

أولاً- من نتائج المحاكاة تبين أفضليه أسلوب بيز في التقدير على طريقة الإمكان الأعظم ولاسيما لحجوم العينات الصغيرة والسبب يعود إلى توظيف المعلومات الأولية عن المعلمات العشوائية في عملية التقدير.

ثانياً - بزيادة حجم العينة تبدأ طريقة بيز باستعمال دالة أولية غير معلوماتية من الاقتراب من طريقة بيز باستعمال دالة الكثافة الاحتمالية الأولية غير المعلوماتية والسبب يعود إلى انه بزيادة حجم العينة تنتفي الحاجة إلى استعمال المعلومات الأولية عن المعلمات العشوائية في عملية التقدير

ثالثاً- تبين من خلال تجارب المحاكاة إن قيم دالة المعولية تتناقص بزيادة الزمن وهذا ينسجم مع الجانب النظري المتعلق بخواص دالة المعولية .

التوصيات

أولاً: نوصي باستخدام طريقة بيز القياسية ل لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل ولجميع حجوم العينات.

ثانياً :نوصي بأجراء بحث تطبيقي متعلق بالنظام المتسلسل .

8- المصادر:

1-Koch,Kavl.Rudolf (2007) "Introduction to Bayesian Statistics" Second Edition .

2- Raus & Mavvin .(2004) "System Reliability Theory ", John Wiley and Sone , Second Edition .

3- Sinha ,S.K & and Kale ,B.K .(1986) "Life Testing and Reliability Estimation " ,Wiley Eastern Limited, Second Edition ,India .

4- Zacks . S &Even . M (1966) "Minimum Variance Unbiased and Maximum Likelihood Estimators of Reliability Functions for Systems in Series and Parallel "JASA, Vol.61, pp1052-1062.

5-Zio, Enrico .(2006) "Introduction to Basic of Reliability and Rick Analysis " Polytechnic of Milan, Italy.