المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (22)2012
ص ص [49-65]

التحليل البيزي لاختبار العمر الزمني المعجل لتوزيع ويبل ذي الثلاث معلمات مع التطبيق

د.طالب شريف جليل* د.خالدة احمد محمد**

المستخلص

يتعامــل هــذا البحــث مــع موضــوع اختبــارات الحيــاة المعجلــة (Accelerated life testing).حيث تم استخدام أسلوب بيز لاختبارات الحياة المعجلة اخـذين بنظر الاعتبار توزيع ويبل ذا ثلاث معلمات ممثلا لأزمنة الفشل ,ونموذج استجابة – الحيـاة لا ينص (بوجود عامل حراري واحد وبمستويات مختلفة) وافترضنا ان البيانات لازمنة الفشل هي بيانات مختلطة تضم بيانات كاملة واخرى غير كاملة من النوع الثاني(censored data Type II) واجـري تحليـل بيـز الكامـل باسـتخدام احـدى طرائـق محاكـاة سلاسـل مـاركوف(Monte Carlo Markov Chain) الا وهـي المعاينـة الجبـسية(Gibss sampler) وأخيرا تم تطبيق النموذج على بيانات تمثـل أزمنـة الفـشل للفواصـل نـوع (lcm21) من دائرة كهرباء نينوى.

Abstract

This paper deals with accelerated life testing. Bayesian approach for accelerated life test, will be developed taking into consideration three parameters Weibull distribution representing failure times, and Arrhenius life-stress model(with existence of thermal stress factor of different levels).We assumed that the data representing the failure times an mixed data including complete and censored data of the second type.

Full Bayesian analysis has been carried out by using one way of the simulation of Markov chain Monte Carlo which is the Gibbs sampler, finally the data used in the analysis represent the failure time of the conductors type Icm21 from Ninevah electric management office.

* استاذ مساعد / قسم الإحصاء / كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة صلاح الدين.
** مدرس / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل.

تاريخ التسليم 2012/1/31 ـــــــــــــــــــ تاريخ القبول 2012/3/25

هدف البحث

يهدف البحث الى تقدير أزمنة الفشل لوحدات تعمل تحت ظروف إجهـاد طبيعيـة بالاعتماد على بيانات الفشل للوحدات العاملة تحت ظروف عمل معجلة هذه العمليـة تـسمى بالاستقراء Extrapolation والذي بدوره يتطلب إيجاد مقدرات لمجموعـة مـن معلمـات المجتمع قيد الدراسة.اي انه يتم عمل استدلال عن معوليـة الأداء فـي بيئـة الاسـتخدام (Environment use) مـن خـلال الحـصول علـى معلومـات مـن البيئـة المعجلـة (Accelerated environment).

1- المقدمــة

عند التعامل مع مفردات (items) ذوات معولية عالية في كثير من المجـالات مثـل المعدات الالكترونية المتكاملة الكبيـرة جـداً (Very large scale integrated VLSI) او معدات الحاسوب، أو الاجهزة الكهربائية او الصواريخ..الخ فـأن معـدلات أزمنـة الفـشل (Mean time to failure MTTF) التي تتجاوز العام ليست نادرة ويتطلب اسـتخدام هـذه المفردات إثبات معولية عالية خاصة عندما نستخدمها في تطبيقات عسكرية او تطبيقات ذوات مخاطر عالية على الناس. ان المدة الزمنية المطلوبة لتوليد عدد معقول من حـالات الفـشل لاتحتمل غالباً لذا فقد أصبحت عمليات اختبار وحدات كهذه تتم من خـلال وضـعها تحـت ظروف عمل اكثر قسوة وهو اجراء قسري وعادة ما تسمى اختبارات كهذه باختبارات الحياة المعجلة (Accelerated life testing) وبسبب التقدم التكنولوجي وزيادة المعولية أدى هـذا كله الى استخدام اختبارات الحياة المعجلة اكثر من اختبارات الحياة الاعتيادية

قدمت سلسلة من البحوث كان أسلوب الاستدلال فيها هو استدلال بيز الذي يعتمد على الحكم الهندسي لتحديد توزيعات مسبقة لمعلمات نموذج ويبل، اذ هنالك كثير من المؤلفات في هـذا المجال ذلك ان عملية الحصول على الكثافة الحدية للتوزيـع اللاحـق ذي الـشكل المغلـق (Closed form) للمعلمات قيد الدراسة عملية معقدة ولحل هذه المعـضلة قـدم كـل مـن (Tierney and Kadane) عام 1986 طريقة لابلاس لتقريب التكاملات التي من خلالهـا يتم الحصول على الكثافات الحدية اللاحقة التقريبية.

وفي السنوات العشر الأخيرة أخذت البحوث تتجه منحى اخر في تقييم التكاملات (أي الكثافات الحدية اللاحقة) وذلك باستخدام طرائق محاكاة سلاسل مـاركوف (Mont Carlo Markov Chain(MCMC)) -علـى سـبيل المثـال تنـاول كـل مـن Mattos ,N.M.C.& Higen,H.S.M. في عام 2001 تقنيات محاكاة سلسلة ماركوف(MCMC) لاجراء استدلال بيز لتقييم معولية أداء الوحدات التي توزيع عمرها الزمني ويبل ذو المعلمتين المقدمة لتعجيل

الاختبارات الحياتية- واحدى أهم هذه الطرائق طريقة المعاينة الجبسية التي تستخدم خاصة في النماذج المعقدة. وقد طُبقت طريقة المعاينة الجبسية لتقييم تكاملات توزيع ويبـل ذي ثـلاث معلمات (أي في ايجاد الكثافات الحدية اللاحقة لمعلماته). ثم ايجاد مقدرات هذه التوزيعات.

ذلك ان تحليل نموذج ويبل (ذي ثلاث معلمات) – أرينص الخاص بدراسـتنا يناسـب البيانات التي تم الحصول عليها من دائرة كهرباء نينوى ولذلك قمنا بتطبيق نموذج أو علاقة استجابة –الحياة لارينص(Arrhenius Relationship or(life-stress model

2- نموذج استجابة الحياة لارينص Arrhenius Life-stress model

يعد نموذج العمر الزمني تحت الإجهاد لارينـص Arrhenius Life-stress model (أو العلاقة) من اكثر النماذج أو العلاقات شيوعاً واستخداماً في اختبارات الحياة المعجلة. وقد استخدم على نحو واسع عندما كان العامل المحفز او التعجيلي حرارياً (أي درجـة الحـرارة) وقد اشتق من معادلة نسبة التفاعل لأرينص Arrhenius Reactio Rate التي وصفها العالم الكيميائي – الفيزيائي Svandle-Arrhenius في عام 1887. ان معادلـة سـرعةالتفاعل لارينص هي : :(انظر (Ebeling,E.1997)

$$R(T) = Ae^{-EA/K.T} \quad ..(1)$$

إذ إن:

R : سرعة التفاعل.A : ثابت غير حـراري مجهـول.EA : تحفيـز الطاقـة (Energy ctivation)

K : ثابـت بولتزمـان (Boltzman's constant)وقيمتـه (8.617385×10^{-5} e^V/K(Kelvin))

T : درجة الحرارة المطلقة مقاسة بمقياس كلفن (Kelvin).

إن تحفيز الطاقة هو مقياس تأثير درجة الحرارة في التفاعل.كما إن نمـوذج العمـر الزمني تحت الاجهاد لارينص يصاغ بافتراض أن العمر الزمني للمادة متناسب مـع نـسبة مقلوب تفاعل العملية، وهكذا فان علاقة اجهاد – الحياة لأرينص موضحة في المعادلة الآتية:

$$L(V) = Ce^{B/V} \quad ..(2)$$

إذ إن:

L : مقياس حياتي محدد كان يكون معدل العمر الزمني، الوسيط،... الخ

V : مستوى الإجهاد (ممثلاً بدرجة الحرارة وقيمتها تكون بوحدات مطلقة أي مقاسة بمقياس كلفن). C : إحدى معلمات النموذج المطلوب تقديرها تقيس التاثير غير الحراري (C>0).

B : معلمة أخرى من معلمات النموذج وهي تقيس التأثير الـذي تـسلطه درجـة الحـرارة (الاجهاد) على العمر الزمني. فكلما كانت قيمة B كبيرة ازدادت الاعتماديـة علـى إجهـاد

محدد. وقد تأخذ المعلمة B قيما" سالبة وعندئذ يزداد زمن البقاء بزيادة الإجهاد. مثـال ذلـك البصيلات المملؤة بالبلازما اذ تكون درجة الحرارة المنخفضة هي الإجهـاد الأعلـى علـى البصيلات من الدرجة الحرارية العالية. انظر (Nelson, W., 1971, 1990).

وبما إن نموذج أرينص هو نموذج فيزيائي بالأساس فقد أشتق بالاعتماد على درجة الحرارة. ولهذا يوصى باستخدامه للاختبارات المعجلة الحرارية وللسبب نفسه يجب أن تكون قيم درجة الحرارة بوحدات مطلقة أي (كلفن).

وأول من استخدم هذا النمـوذج فـي تطبيقـات اختبـارات الحيـاة المعجلـة همـا (Thomas and Gorton 1963).

وبما إن هذا النموذج –وكما أشرنا- هو من أهم النماذج وأكثرهـا شـيوعاً فـسنقوم بتطبيقه على توزيع الحياة ويبل ذي المعلمات الثلاث.

3- تحليل بيز عندما يكون توزيع العمر الزمني توزيع ويبل ذا ثلاث المعلمات:

ان توزيع ويبل هو أحد أهم توزيعات العمر الزمني (Life time) استخداماً فـي مجـال المعولية الهندسية وهذا يعود الى كونه توزيعاً متقلباً (Versatile) واعتماداً على قيمة معلمـة الشكل (Shape parameter) فانه ياخذ خواص التوزيعات الاخرى.

ان دالـة الكثافـة الاحتماليـة لتوزيـع ويبـل ذي ثـلاث معلمـات هـي:(انظـر Ebeling,E.1997)

$$f(t;P,\lambda,\gamma)=\frac{P}{\lambda}\left(\frac{t-\gamma}{\lambda}\right)^{P-1}e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\lambda}\right)^{P}} \quad ..... \quad (3)$$

$$t\geq\gamma;P,\lambda>0;\gamma\geq o$$

اذ ان:

λ = معلمة القياس Scale parameter   P = معلمة الشكل Shape parameter

γ = معلمة الموقع Location parameter

ولاجـــراء تحليـــل بيـــز عنـــدما يكـــون توزيـــع العمـــر الزمنـــي المعجـــل (Accelerated life time) هو ويبل ذا ثلاث المعلمات، فان المتغير العشوائي T يمثل زمن البقاء لوحدة ما وبدالة كثافة احتمالية هي الموضحة في المعادلة (3) وبافتراض متغير اجهاد هو V ويؤثر في كل من معلمتي القياس والموقع λ ,γ على التوالي، اما معلمـة الـشكل P فلاتتأثر بعامل الاجهاد عند أي مستوى من مستوياته. وبوجود n_i من الوحدات.

ليكن T_{ij} متغيراً عشوائياً وبكثافة ويبل

$$f(t_{ij} \mid \lambda, P, \gamma) = \frac{P}{\lambda_i}\left(\frac{t_{ij}-\gamma_i}{\lambda_i}\right)^{P-1} e^{-\left(\frac{t_{ij}-\gamma_i}{\lambda_i}\right)^{P}} \qquad ..(4)$$

$$i = 1,2,\ldots k; \qquad j = 1,2,\ldots n_i \qquad t_{ij} > 0$$

اذ ان λ_i هي معلمة القياس الخاصة بمستوى الاجهاد V_i، وهكذا الامر لمعلمة الموقع γ_i وكما ذكرنا فان معلمة الشكل P هي نفسها لكل مستوى من مستويات الاجهاد.

وبوجود k مستوى لعامل الاجهاد V نفترض ان النموذج العام لاستجابة – الاجهـاد هو نموذج عام يتضمن نماذج عدة شائعة الاستخدام في مجالات التطبيقات الهندسية وهو

$$\lambda_i = \exp(-(Z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)) \qquad ..(5)$$

حيث ان X_i, Z_i دوال لعامل الاجهاد.

(انظر على سبيل المثال Nelson, 1990)

اما النموذج الملائم لمعلمة الموقع γ_i فهو

$$\gamma_i = \alpha * e^{BV_i} \qquad ..(6)$$

اذ ان α,B معلمات غير معلومة مطلوب تقديرها وهنالك العديد من النماذج الخاصـة بـ γ_i ولقد اختير هذا النموذج لبساطته (انظر Man, R., N.el al., 1974) كمـا يفتـرض وجود ميكانيكية انقطاع من النوع الثاني(Type II censoring) أي ان التجربة(تتوقف بعد حصول r_i فشل عند كل مستوى من مستويات الاجهاد.(انظر الحمداني 2005)

وبوجود n_i وحدة في بداية كل اختبار عند مستوى الإجهاد V_i وهكذا فان دالة الامكان لكل من β_0,β_1,α,B and P هي(انظر الحمداني 2005)

$$L(\beta_0,\beta_1,\alpha,B,P,data) \propto P^r\left(\prod_{i=1}^{K}\prod_{j=1}^{r_i}(t_{ij}-\alpha e^{+BV_i})^{P-1}\right)*$$
$$\exp(-Pa_0 - PB_o r - PB_1 a_1 - e^{-PB_o}$$
$$\sum_{i=1}^{K} A_i(P,\alpha,B) - PZ_i - PB_1 X_i) \qquad ..(7)$$

$$a_1 = \sum_{i=1}^{K} r_i X_i ; A_i(P,\alpha,B) = \sum_{j=1}^{K_i}(t_{ij} - \alpha \;\; e^{BV_i})^{P-1} + (n_i - r_i)(t_i r_i - \alpha \;\; e^{BV_i})^{P}$$

$$a_0 = \sum_{j=1}^{K} r_i Z_i \qquad r = \sum_{i=1}^{K} r_i$$

1-3 تحليل بيز بافتراض المعلمات β_0,β_1,α,B,P غير معلومة:

نستخدم في تحليلنا الاحتمالات السابقة الغنية بالمعلومات وفيما يخص نموذج ويبل في المعادلات (6) ,(5) ,(4) فان تعيين الاحتمالات السابقة للمعلمات غير المعلومة سيكون كالآتي فيما يتعلق بالمعلمات β_0,β_1 وبما ان $-\infty < \beta_0,\beta_1 < \infty$ فان كلاً منها يتوزع توزيعاً طبيعياً

$\beta_0,\beta_1 \sim N(0,\tau_i^2)$ $i = 0,1$

اما فيما يخص المعالم α,B فانها تتوزع توزيعاً آسياً وكالاتي:

$\alpha \sim \exp(c)$ $B \sim \exp(d)$

اما المعلمة P غير السالبة فان التوزيع الاولي الملائم لها هو توزيـع كامـا $\Gamma(b,a)$ واخيراً سوف نفترض ان المعلمات مستقلة عن بعضها.(انظر Mattos,N.M.C. & Mign ,H.S., 2001)

الكثافات اللاحقة المشتركة لكل من $\beta_0,\beta_1,\alpha,B,P$ (انظر الحمداني 2007)

$$\pi_1(\beta_0,\beta_1,\alpha,B,P\,|\,data) \propto \pi_0(\beta_0)\pi_0(\beta_1)\pi_0(\alpha)\pi_0(B)\pi_0(P)L(\beta_0,\beta_1,\alpha,B,P)$$

$$\pi_1(\beta_0,\beta_1,\alpha,B,P\,|\,data) \propto P^{r+a+1}\left(\prod_{i=1}^{K}\prod_{j=1}^{r_i}(t_{ij}-\alpha e^{BV_i})^{P-1}\right) *$$

$$\exp(-Pa_o - P\beta_o r - P\beta_1 a_1 - e^{-PB_o}\sum_{i=1}^{K} A_i(P,\alpha,B)e^{-PZ_i - P\beta_1 X_i}$$

$$-\frac{\beta_0^2}{2\tau_1^2} - \frac{\beta_1^2}{2\tau_2^2} - e\alpha - dB - bP) \qquad ..(8)$$

الكثافة الحدية الشرطية اللاحقة لكل من $\beta_0,\beta_1,\alpha,B,P$

ان الكثافات الحدية الشرطية لكل من β_0, β_1, B,α, P نـستطيع الحـصول عليهـا بوصفها تناسباً للجانب الأيمن للمعادلة (8) وذلك من خلال حذف الحـدود التـي لا تتـضمن المعلمة قيد الاهتمام وهكذا فان:(انظر Mattos,N.M.C. & Mign ,H.S., 2001)

$$\pi_1(\beta_0 \mid \beta_1, \alpha, B, P, data) \propto \exp(-PB_o r - \frac{\beta_0^2}{2\tau_1^2}) *$$
$$\exp\left[-e^{-P\beta_o} \sum_{i=1}^{K} A_i(\alpha, B, P) e^{-PZ_i - P\beta_1 X_i}\right] \quad ....(9)$$

$$\pi_1(\beta_1 \mid \beta_0, \alpha, B, P, data) \propto \exp(-PB_1 a_1 - \frac{\beta_1^2}{2\tau_2^2}) *$$
$$\exp\left[-e^{-PB_o} \sum_{i=1}^{K} A_i(\alpha, B, P) e^{-PZ_i - P\beta_1 X_i}\right] \quad ....(10)$$

$$\pi_1(\alpha \mid \beta_0, \beta_1, B, P, data) \propto \exp\left(\prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij} - \alpha \quad e^{BV_i})^{P-1}\right) *$$
$$\exp\left[-e^{-PB_o} \sum_{i=1}^{K} A_i(\alpha, B, P) e^{-PZ_i - PB_1 X_i} - e\alpha\right] ....(11)$$

$$\pi_1(B \mid \beta_0, \beta_1, \alpha, P, data) \propto \left(\prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij} - \alpha e^{BV_i})^{P-1}\right) *$$
$$\exp\left[-e^{-PB_o} \sum_{i=1}^{K} A_i(\alpha, B, P) e^{-PZ_i - PB_1 X_i} - dB\right] ....(12)$$

$$\pi_1(P \mid \beta_0, \beta_1, \alpha, B, data) \propto P^{r+a-1} \left(\prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij} - \alpha \quad e^{BV_i})^{P-1}\right) *$$
$$\exp\left[-e^{-PB_o} \sum_{i=1}^{K} A_i(\alpha, B, P) e^{-PZ_i - PB_1 X_i} - bP\right] ....(13)$$

نلاحظ أن هذه التوزيعات لا تنتمي إلى أية عائلة معلمية (Parametric family) معروفة.

2-3 تقدير المعلمات Parameter estimation

ان تحليل بيز لنموذج ويبل (4) ,(5) ,(5) يعتمد على استخدام إحدى طرائق محاكاة سلاسل ماركوف (MCMC) الا وهي المعاينة الجبسية (Gibbs sampling).(انظر الحمداني ,2005).

ولتطبيق المعاينة الجبسية يستخدم النظام (Win-BUGS) الذي سنوضحه في الجانب التطبيقي .

ويفترض هذا النظام ان النموذج الاحتمالي هو نموذج بيز كامل ذلك ان الكميات غير المشاهدة جميعاً تعامل على انها متغيرات عشوائية.

يقوم (Win-BUGs) بتصنيف البنية الدالية (Functional form) للتوزيع الشرطي الكامل في محاولة لتمييز، التوزيعات المتقطعة، والتوزيعات اللوغارتمية المقعرة (Log-Con-cave distributions) أو الاوليات المحددة لاختيار اكثر الخوارزميات كفاءةً، التي تطابق نماذج تحقق هذه الخواص. (انظر Gilks, W.R and Wild, P. 1992) اما

فيمـ ـــا يخـ ــص النمـ ــوذج (7) فـ ـــان التوزيعـ ـــات الـ ـــشرطية الكاملـ ـــة (Complete conditional densities) أحادية البعد (Uni -dimensional) وان

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial \beta_0^2}\pi_1(\beta_0 \mid \beta_1, \alpha, B, P),$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial \beta_1^2}\pi_1(\beta_1 \mid \beta_0, \alpha, B, P),$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial \alpha^2}\pi_1(\alpha, \mid \beta_0, \beta_1, B, P),$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial B^2}\pi_1(B, \mid \beta_0, \beta_1, \alpha, P),$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial P^2}\pi_1(P, \mid \beta_0, \beta_1, B, \alpha)$$

وهي كلها غير سالبة، أي ان الكثافات الشرطية التامة كلها ,(9) ,(10) ,(11) ,(12) (13) هي لوغارتمية – مقعرة.

4 –الجانب التطبيقـ ـ ـ ـي

ان قسوة (Severity) مستويات عامل الاجهاد في اختبارات الحياة المعجلة لاتؤثر فـي نـوع توزيع زمن البقاء ولكنها تؤثر في قيم معلمات التوزيع.

لغرض توضيح استخدام تقنيات محاكاة سلاسل ماركوف (MCMC) في اجراء تحليل بيز لقيم معدلات أزمنة البقاء والعمل تحت ظروف عمل طبيعية قمنا بتطبيق النموذج المذكورأنفاً على البيانات التي تم الحصول عليها من دائرة كهرباء نينوى.

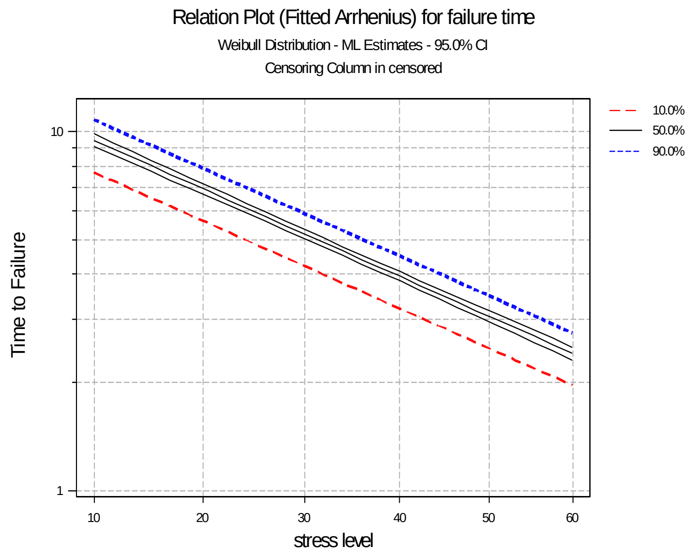
1-4 نموذج أرينص The Arrhenius model

هو حالة خاصة من نموذج استجابة – الاجهاد العام (4) الخاص بمعلمة القياس λ_i .

$$\lambda_i = \exp(-(Z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)) \qquad ..(5)$$

ويعرف كالاتي $\beta_1=\beta,\ \beta_0=-\beta_0,\ Z_i=0,\ Xi=-1\backslash Vi$ (للمزيد انظر المبحث 2) طبـق هذا النموذج على البيانات التي تمثل أزمنة فشل الفواصم من نوع Icm21- المحصل عليهـا من دائرة كهرباء نينوى. وهي مادة تنصهر بمرور التيار المرتفع وتعتمد على شـدة التيـار وزمن مروره. تعمل هذه الفواصم تحت ظروف تشغيل قياسية هي V_0=5A وقد اختبرت هذه الوحدات بوضعها تحت مستويات اجهاد عالية هي 60A, 50A, 30A, 20A, 10A وتم عند كل مستوى V_i من مستويات الاجهاد وضع n_i وحدة قيد الاختبار وبشدة تيار ثابـت، r_i منهـا ذات عمر زمني كامل و(n_i- r_i) ذات عمر زمني غير كامل (Censored) .

ويمستوى امبيرية ثابتة لكل مستوى من مستويات الاجهاد V_i (أي إجهـاد ثابـت). وتخـضع أزمنة الفشل لوحدات كهذه يمكن أن نفترض تخضع لتوزيع ويبل لمعلمة الـشكل P ومعلمـة قياس λ_i. بالاستناد إلى اعتبارات هندسية من ناحية وتم من ناحية أخرى عمل تطابق للبيانات مع توزيع ويبل باستخدام البرامجية الجاهزة (13 Minitab) وكما هو مبين في الـشكل (1). (انظر الحمداني,2005)



الشكل (1): رسم العلاقة (تطابق أرينص) لأزمنة فشل توزيع ويبل

وبتطبيق طريقة المعاينة الجبسية لتقدير المعلمـات $\beta_0, \beta_1, \alpha, B, P$ وعـدد مـن الكميات الاخرى المشتقة. ويتم ذلك مـن خـلال اسـتخدام النظـام Win-BUGS ويعنـي (BUGS)استدلال بيز باستخدام المعاينة الجبسية) الذي يستخدم في تحليـل بيـز للنمـاذج الإحصائية المعقدة باستخدام احدى تقنيات محاكاة سلاسـل مـاركوف (MCMC) الا وهـي المعاينة الجبسية.(انظر(Mattos, N.M.C. and Mign, H.S 2001.

وتوصف النماذج في نظام BUGS عن طريق الرسم Doodles (أي تمثيل النمـاذج بيانياً) أو من خلال كتابة برامج بلغة BUGS والطريقة الثانية الكثر مرونة في التعامـل مـع النماذج. ولقد استخدمت الطريقة الثانية في تمثيـل النمـاذج (9) ,(10) ,(11) ,(12) ,(13) التي تمثل التوزيعات الحدية اللاحقة لكل من المعالم $\beta_0, \beta_1, \alpha, B, P$ على التوالي.

وعند البدء بكتابة برنامج بلغة BUGS نواجه مشكلة هي ان توزيع ويبل ذا المعلمات الثلاث غير معرف في لائحة التوزيعات القياسية في Win-BUGS فكان لابد اولاً من تعريفه ضـــمن برنـــامج خـــاص يكتـــب لتعريـــف توزيـــع معاينـــة جديـــد (Specify a new sampling distribution) ويتم ذلك باستخدام احدى طريقتين اما طريقة

Zero's trick او طريقة One's trick , Censoring ، وبما ان بيانات ازمنـة الفـشل t[i] تضم بيانات غير كاملة لهذا نقوم باستخدام الطريقة الثانية.

الا أننا نواجـه مـشكلة أخـرى – فـي كتابـة البرنـامج – تقتـضي اسـتخداماً متقـدماً (Advance use) لنظام BUGS. تتعلق هذه المشكلة بالبيانات المستخدمة ذلك إن هيكلهـا (form) يكون غير متوازن (Unbalanced) أي لايمكن إدخال البيانات على شكل مـصفوفة وعند أمعان النظر في الجدول الخاص بالبيانات نلاحظ ان عدد الأعمدة فـي الأسـطر غيـر متساو ولهذا لابد من عمل معالجة لـه (Handle unbalanced dataset) ويقـدم نظـام BUGS ثـلاث طرائـق للتعامـل مـع هـذه الحالـة وهـي مـلء المـستطيل (Fill-to-rectangular)، وتغير مفاجئ فـي أبعـاد البيانـات (Offset) وأخيـرا طريقـة (Nested-indexing). التي تتضمن خزن البيانات في متجه ذي بعد واحد وتكـوين متجـه مقترن له يمثل فهرساً للبيانات(للمزيد انظر الحمداني 2005) .

وكانت نتائج تحليل كل من التوزيعات الحدية اللاحقة لكل من $\beta_0, \beta_1, \alpha, B, P$ المتمثلة على التوالي بـ (9) ,(10) ,(11) ,(12) ,(13) كالاتي:

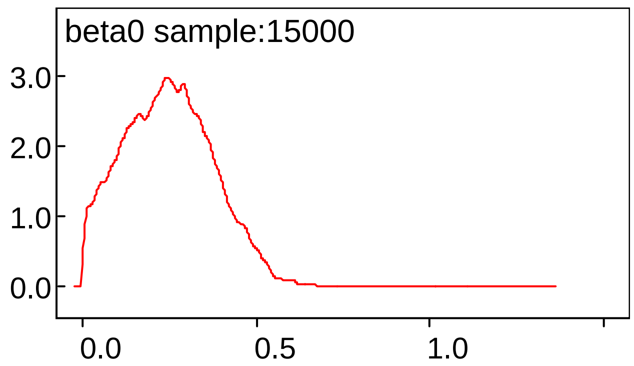
أولا: بالنسبة إلى ما يخص التوزيع الحدي اللاحق للمعلمة. β_0 وهي إحدى معلمـات نمـوذج أرينص في (4) كانت نتائج البرنامج كالاتي(انظر الحمداني 2005):

1- الـشكل (2) يمثـل شـكلاً بيانيـاً لتقـدير كثافـة النـواة الممهـدة للمعلمـة β_0 (Smoothed Kernel density) التي هي احدى معالم نموذج أرينص.

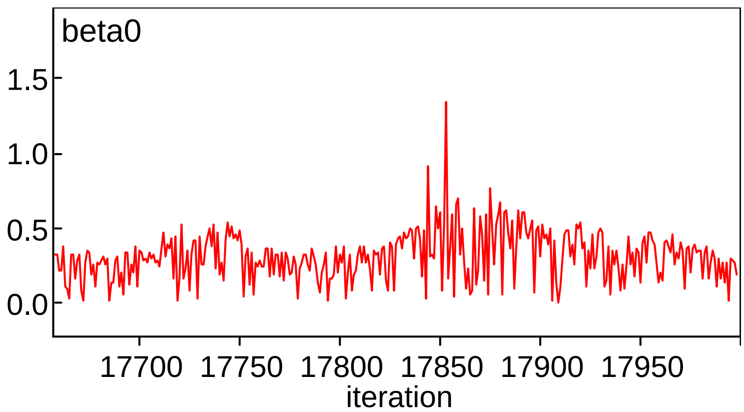
2- الشكل (3) يمثل رسم العينة ضد التكرارات: ان الشكل البياني (trace) مؤشر جيـد يبين ان كانت السلسلة المكونة متقاربة فان كانت كما هو واضح في الشكل (3) فـان هذا يعني الاقتراب من التوزيع الحدي اللاحق المطلوب، وعندما يحـصل التقـارب (Convergence) سـوف نجـري تشخيـصاً (Diagnostic) لايقـاف المحاكـاة (Terminate simulation) في الجانب التطبيقي(انظر Tierney, L., 1994) لقـد بين Tierney ان التقارب يحدث تحت شروط ثلاثة تتوافر في السلاسل (Chains) المكونـة وهـي اللااختزاليـة Irreducibility، والانتقـالات بهـا غيـر دوريـة aperiodicity، واخيراً اللا تغير invariance (للمزيد من المعلومات بـشأن ذلـك(المعاينة الجبسية انظر الحمدانـي 2005). وعند تحقق ذلك فهذا يعني ان المقدرات التي تم الحصول عليها هي أحسن تقديرات (Best estimator).

3- وفي الشكل (4) تبين حدود الثقة البيزية (HPD) للمعلمة β_0 واخيراً هنالك إحصائيات ملخصة خاصة بالمعلمة β_0، متضمنة معدل زمن الفشل وقيمته 0.2518، كما يزودنا

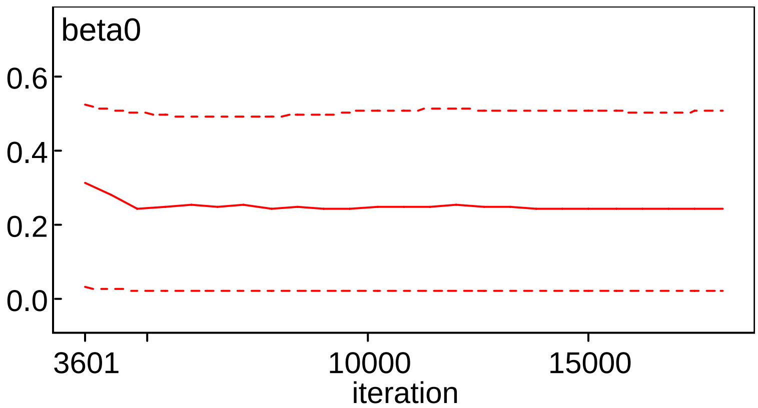
بقيمة خطأ مونت كارلو (MC error) الذي يمثل مؤشراً حسابياً للاقتراب من التوزيع اللاحق المطلوب، اذ تستمر المحاكاة حتى يصل خطأ مونت كارلو الى اقل مـن 5% من الانحراف المعياري للعينة (أي انه يعطي تقـديراً $\sigma/N^{1/2}$) لكـل معلمـة قيـد الاهتمام وهذا ما يشير إليه خطأ مونت كارلو للمعلمة β_0 اذ تبلـغ قيمتـه 0.00439 كما يبين لنا قيمة الوسيط وحجم العينة.



الشكل (2) تقدير النواة الممهدة للمعلمة β_0



الشكل (3) رسم العينة (trace) للمعلمة β_0 ضد التكرارات



الشكل (4) حدود الثقة البيزية (HPD) للمعلمة β_0

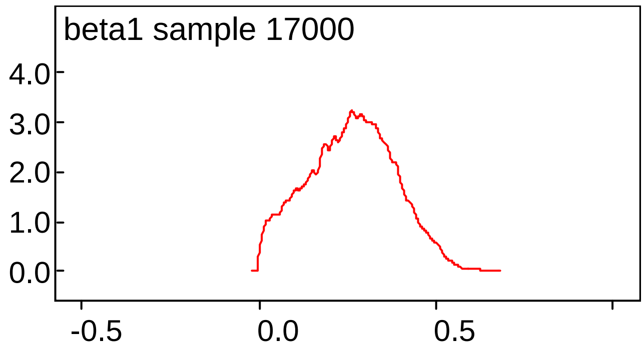
node	mean	Sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
Beta 0	0.2518	0.1221	o.004394	0.02417	0.2551	0.4773	501	16500

اما فيما يتعلق بالتحليل الخاص بالمعلمة β_1 –التي تمثل تاثير شدة التيار في زمن الفشل – فقد كانت النتائج كالاتي:

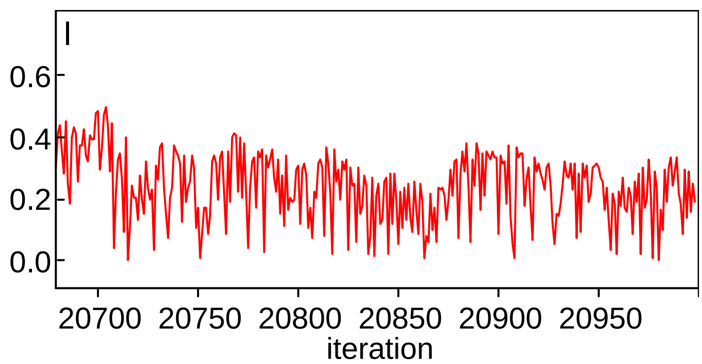
1- الشكل (5) خاص بتقدير كثافة النواة الممهدة لـ β_1.

2- الشكل (6) خاص برسم العينة مقابل التكرارات وهو ايضاً يشير الى وجـود حالـة اقتراب من التوزيع اللاحق المطلوب.

وأخيرا وفيما يتعلق بالإحصائيات الخاصة بهذه المعلمة وبما ان قيمـة متوسـط التوزيـع اللاحق الحدي للمعلمة β_1 موجب وغير كبير فان هذا مؤشر على ان الاعتمـاد علـى قيمـة إجهاد محددة يكون ضئيلاً.



الشكل (5) تقدير النواة الممهدة للمعلمة β_1



الشكل (6) رسم العينة (trace) للمعلمة β_1 ضد التكرارات

اما فيما يخص التحليل الخاص بالمعلمة α وهي احدى معلمات نموذج الإجهاد لمعلمة الموقع γ_i لتوزيع ويبل،

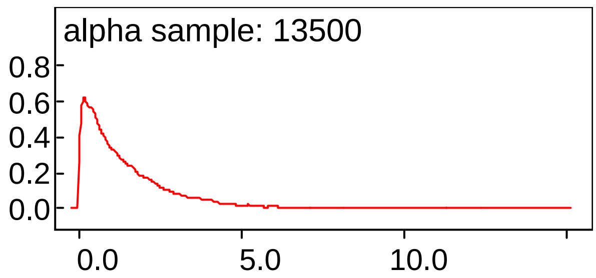
فكانت النتائج كما يأتي:

1- نلاحظ في الشكل (7) تقدير كثافة النواة الممهدة للمعلمة α.

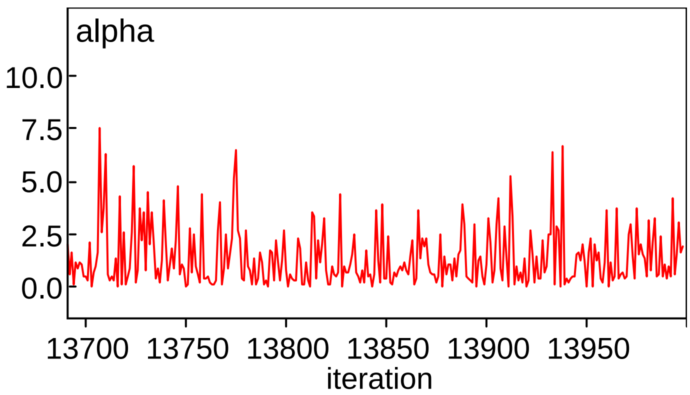
2- يمثل الشكل (8) رسماً لقيمة المعلمة غير المعلومة α ضد عـدد التكـرارات ومنـه نلاحظ ان السلسلة مقترنة بالتوزيع المستقر.

3- يمثل الشكل (9) مخطط حدود الثقة البيزية للمعلمة α مع عدد التكرارات.

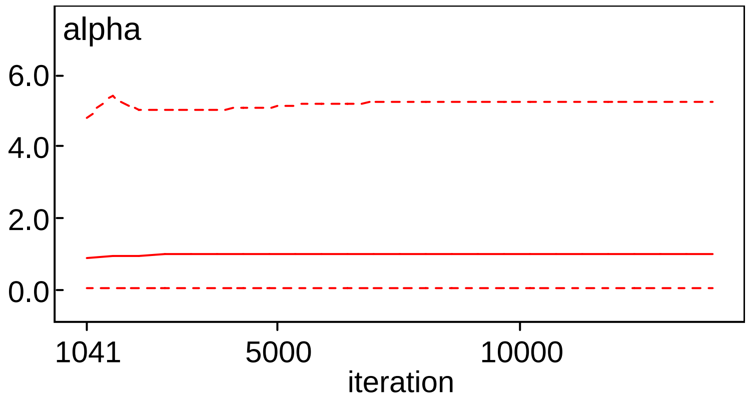
4- الكمية المؤشرة في عمود خطأ المونت كارلو هي أقل مـن 5% كمـا تبـين ذلـك الإحصائيات الخاصة بالمعلمة α.



الشكل (7) تقدير النواة الممهدة للمعلمة α



الشكل (8) رسم العينة (trace) للمعلمة α ضد التكرارات



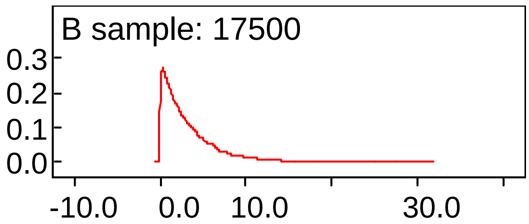
الشكل (9) حدود الثقة البيزية (HPD) للمعلمة α

فيما يخص المعلمة B وهي معلمة اخرى من معالم نموذج معلمة الموقع γ_i، كانت نتائج تحليل التوزيع الحدي اللاحق بها كالآتي:

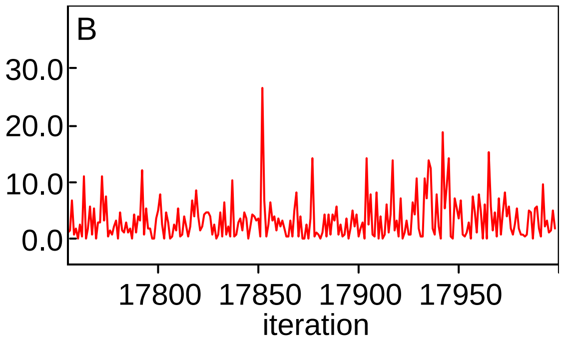
1- يمثل الشكل (10) رسم تقدير نواة الكثافة الممهدة للمعلمة B غير المعلومة.

2- يمثل الشكل (11) رسماً لقيم المعلمة B مقابل عدد التكرار، وهو يشير كـذلك الـى اقتراب السلسلة من التوزيع المستقر.

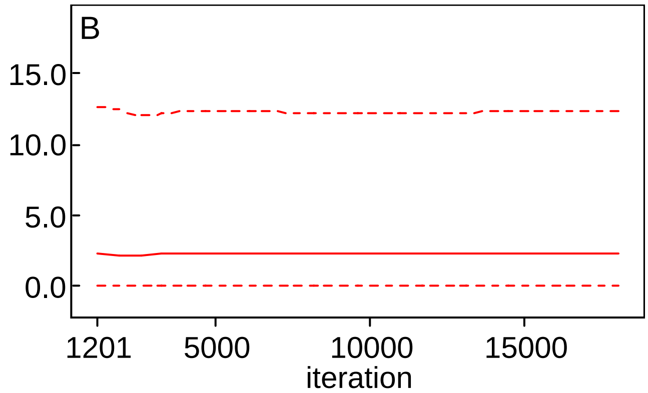
3- يمثل الشكل (12) مخطط حدود الثقةالبيزية 95% للمعلمة B.



الشكل (10) تقدير النواة الممهدة للمعلمة B



الشكل (11) رسم العينة (trace) للمعلمة B ضد التكرارات



الشكل (12) حدود الثقة البيزية (HPD) للمعلمة B

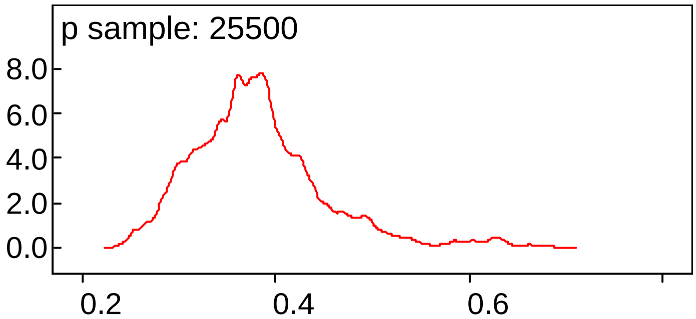
واخيراً فيما يخص معلمة الشكل P التي لاتتأثر بعامل الاجهاد فكانت نتائج تحليل توزيع اللاحق الحدي لها كالاتي:

1- يمثل الشكل (13) رسماً مقدراً بنواة الكثافة الممهدة للمعلمة P وهو يقترب من توزيع كاما.

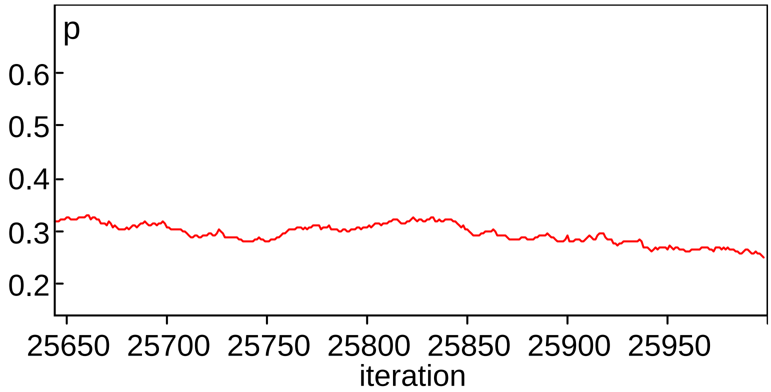
2- يمثل الشكل (14) رسم المعلمة P مقابل التكرارات. وهو يشير الى عـدم اقتـراب السلسلة من التوزيع المستقر.

3- يمثل الشكل (15) مدى الثقة 95% للمعلمة P.

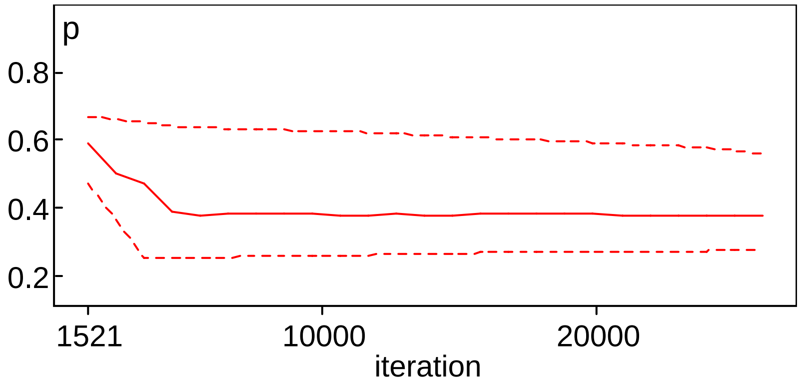
4- وبما ان قيمة خطأ مونت كارلو الخاص بالمعلمة P ليس اقل من 5% فان ذلك يؤكـد عدم اقتراب السلسلة من التوزيع المستقر.



الشكل (13) تقدير النواة الممهدة للمعلمة P



الشكل (14) رسم العينة (trace) للمعلمة P ضد التكرارات



الشكل (15) حدود الثقة البيزية (HPD) للمعلمة P

الاستنتاجات

1- تعد المعاينة الجبسية إجراء مهماً جداً في تحليل بيز لوحدات توزيع عمرها الزمني هو توزيع ويبل تخضع لاختبارات الحياة المعجلة فضلاً عن إنها تزودنا بتقديرات جيدة للمعلمات قيد الدراسة كما تسمح بإيجاد التقدير التنبوئي للتوزيع اللاحق عند أي زمن, من الممكن تقديره في دراسات لاحقة.

2- ان نظام Win-BUGS يساعد في إيجاد نتائج ذوات معولية عالية في الجانب التطبيقي حيث ان هنالك الكثير من الاجهزة والوحدات ذوات معولية عالية(عمر زمني طويل الامد) في دائرة كهرباء نينوى على سبيل المثال هذا من جهة ومن جهة أخرى فان هذا النظام يتعامل بشكل جيد مع النماذج المعقدة ذوات الابعاد العالية التي بحاجة الى وسائل كالمعاينة الجبسية للحصول على الكثافات التامة المشتركة والحدية للمعلمات ومن ثم المقدرات الخاصة بها كالمعولية ومعدل أزمنة الفشل, الوسيط ...الخ حيث يتعذر ايجادها بالطرائق الاخرى.

المصادر:

1-الحمداني, خالدة احمد محمد(2005),"استخدام اسلوب بيز لاختبر العمر الزمنـي المعجـل وتطبيقها على المعدات الكهربائية في دائرة كهرباء نينوى "أطروحة دكتوراه غيـر منـشورة ,جامعة الموصل ,كلية علوم الحاسوب والرياضيات.

1- Achcr, J.A. J.A. and Louzada-Neto, F. (1992): "A Bayesian approach for a life tests considering the Weibull distribution", Computional statistics, 7, PP 355-369.
2- Achcar, J.A. and Smith, A.F.M, (1990): “Aspects of reparametreization in approximations Bayesian inference, in Essays in houor of George A. Barnard, ed. J. Hodges, Amsterdam: North-Holland, PP 439-452.
3- Achcar, J.A. and Espinosa, M.M, (1991): "Bayesian mehods in accelerated life tests considering A Log-Lineur model for the Birnbaum-Saunders distribution", R. Bras. Estat., Riode Janeiro, 52 (17l198): PP47-68.
4- Ebeling, C.E(1997): "An introdto reliability and Maintainability engineering", The Mc Graw-Hill companies, Inc.
5- Mann, N.R., Schaffere, R.E. and Singpuiwalla, N.D. (1974): "Methods for statistical analysis of reliability and life data. John Wiley, New York.
6- Mattos, N.M.C. and Mign, H.S (2001): "Bayesian analysis of reliability in accelerated life tests using Gibbs sampler" Computional statistics, 16, PP 299-312.
7- Nelson, W. (1990): "Accelerated testing, Statislcal models tests plans and data analysis, John Wiley, New York.
8- Thomas, R.E. and Gorton, H.C. (1963): “Research towards a physics of aging in Electronics”, proceedings of the second annual symposinm on the physics of failure in Electronics.
9- Tierney, L., (1994): “Markov chains for exploring posterior distributions”, Annals of Statistics, 22, 1701-1728.