تقدير بيز باستخدام معلومات Jeffrey لمعلمة القياس لتوزيع Erlang

Bayes Estimation By using Jeffrey Information for Scale Parameter of Erlang Distribution

م.جاسم حسن لازم

الكلية التقنية الإدارية | بغداد

1-المستخلص

توزيع Erlang هو من التوزيعات المهمة والذي لديه تطبيقات واسعة في نظرية الانتظار إذ هو عبارة عن توزيع لمجموع من متغيرات آسية, لذلك فان التوزيع الآسي والتوزيع Erlang تستعمل دوالهما في مجالات تطبيقية مختلفة.فعلى سبيل المثال لا الحصر فان مدة النداءات الفردية في بدالة معينة تتوزع أسيا لذا فان المكالمات المتعاقبة تتوزع توزيعا Erlang.

وفي هذا البحث تم تقدير معلمة القياس (scale parameter) لتوزيع Erlang باستخدام أسلوب بيز المعتمد على معلومات جفري كطريقة أولى ثم تم التوسع في معلومات جفري كطريقة ثانية ثم استخدمت دالة المخاطرة التي استخدمها ألبياتي في توزيع ويبل لتصبح طريقة ثالثة ثم أدخلت عدة تعديلات على هذه الدالة لتصبح طرائق أخرى (طريقة رابعة وخامسة وسادسة) واسُتخدم لهذا الغرض حجوم العينات (100,50,25) إذ أظهرت النتائج تفوق طريقة بيز الثانية على بقية الطرائق الأخرى بالاعتماد على المعيار الإحصائي مجموع مربعات الخطأ (MSE).

Abstract

Erlang distribution is considered one of the important distribution which has wide application in queue theory for being a distribution of the sum of exponential variables, which with Erlang distribution function are used in different fields and application for instance, time interval of individual calls at a specific extension are exponentially distributed thus the consecutive calls are Erlang distributed.

In this research, scale parameter is being estimated for Erlang distribution using Bayes method depending Jeffrey's method then enhanced in Jeffrey's information as a second method, then risk function which have been used by " AL- Bayati" in Weibull distribution as a third method.Several adjustments then made on this function to make other several methods(fourth, fifth and sixth methods) using sample sizes of(25, 50 ,100).Results showed the superiority of the second Bayes method on other methods.

2-المقدمة وهدف البحث

أجريت الكثير من الدراسات على توزيع Erlang , ففي عام 1988 ناقش الباحثان Harischandra and Rao بعض المشاكل للاستدلال التقليدي في توزيع Erlang [7] وفي عام 1994 قام الباحثان Bhattacharyya and Singh بالحصول على تقدير بيز لتوزيعErlang تحت دالتين سابقتين (two Prior) [4].

وفي عام 2001 ناقش الباحث Jain مشكلة لنقطة التغير لتوزيع أوقات الوصول الداخلية في سياق العائلة الآسية لنظام طابور EA|GIC وتم الحصول على تقدير بيز بالاعتماد على دوال احتمالية سابقة لمواقع التغيير من توزيع Erlang [8].وفي عام 2003 قام الباحث Nair وآخرون بدراسة توزيع Erlang كنموذج لفترات Wave وحصل على خصائص مختلفة لهذا التوزيع [10].

وفي عام 2006 قام الباحثان Thomopoulos and Plumchitchom بدراسة انظمة انتظار ماركوفية الذي يكون فيها الوصول الداخلي تتبع توزيع Erlang [13] وفي عام 2009 قام الباحث Suriوآخرون باستعمال توزيع Erlang لتصميم محاكاة لتقدير وقت عملية إدارة المشروع [11],وفي عام 2010 قام الباحث Damodaran et al بالحصول على توقع الوقت بين قياسات الفشل للتوزيع Erlang [5] وفي عام 2011 قام الباحثان Abdull Haq and Snau Deg بتقدير بيز بالاعتماد على عدة دوال احتمالية للتوزيعات مبتورة [2].

وفي هذا البحث يتم تقدير معلمة القياس بأسلوب بيز بالاعتماد على معلومات Jeffrey المسبقة Jeffrey Prior Information.

3- **تقدير بيز** Bayes Estimation

3-1 طريقة بيز الأولى The First Bayes Method [3]

افترض x1,x 2 ,….x n متغيرات عشوائية مسحوبة من عينة عشوائية بحجم n بدالة كثافة الاحتمالية (p.d.f) Probability density function $f(x;\alpha,c)$ والتي هي كما يلي:

$$f(x;\alpha,c)=\frac{x^{c-1}}{\alpha^{c}(c-1)!}\exp(-\frac{x}{\alpha}),x\geq 0,\alpha>0,c>0 \qquad \text{.......................} (1)$$

إذ إن:

α: معلمة القياس (Scale parameter)

C: معلمة الشكل (Shape parameter)

حيث تعتمد طريقة بيز على معلومات جفري المسبقة Jeffrey prior information وكما يلي:

تفترض معلومات جفري المسبقة إن دالة $g(\theta)$ تتناسب طرديا مع الجذر ألتربيعي لمعلومات فيشر Fisher information وكما يلي :

$$g(\alpha) \propto \sqrt{I(\alpha)} \qquad \text{.......................... (2)}$$

إذ إن: $I(\theta)$ هي معلومات فيشر (Fisher information) وان

$$I(\alpha) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\alpha,c)}{\partial \alpha^2}\right)$$

$$I(\alpha) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\alpha,c)}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{nc}{\alpha^2} \qquad \text{.......................... (3)}$$

$$g(\alpha) = \frac{k\sqrt{nc}}{\alpha} \qquad \text{.......................... (4)}$$

$$L(x_1, x_2, .., x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{c-1}}{[\alpha^c (c-1)!]^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}\right) \qquad \text{.......................... (5)}$$

$$\because H(x_1, x_2, .., x_n; \alpha, c) = L(x_1, x_2, .., x_n) g(\alpha)$$

$$\therefore H(x_1, x_2, .., x_n; \alpha, c) = \frac{k\sqrt{nc}\prod_{i=1}^{n} x_i^{c-1}}{\alpha^{nc+1}[(c-1)!]^n} * \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}\right) \qquad \text{.................. (6)}$$

$$P(x_1, x_2, .., x_n) = \int_0^\infty H(x_1, x_2, .., x_n; \alpha, c)\, d\alpha$$

$$= \frac{k\sqrt{nc}\prod_{i=1}^{n} x_i^{c-1}(nc-1)!}{[(c-1)!]^n (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nc}} \qquad \text{........................ (7)}$$

$$\therefore \Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n) = \frac{H(x_1, x_2, .., x_n; \alpha, c)}{P(x_1, x_2, .., x_n)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nc}}{\alpha^{nc+1}} \exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}) \qquad \text{.......................... (8)}$$

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\alpha},\alpha) = b(\hat{\alpha}-\alpha)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة Risk function لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\alpha},\alpha) = E(\ell(\hat{\alpha},\alpha)) \qquad \text{..............................(9)}$$

$$= \int_0^\infty \ell(\hat{\alpha},\alpha) \prod(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n) d\alpha$$

$$= \int_0^\infty b(\hat{\alpha}-\alpha)^2 * \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nc}}{\alpha^{nc+1}} \exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}) d\alpha$$

$$R(\hat{\alpha},\alpha) = b\hat{\alpha}^2 (nc-1)! - 2b\hat{\alpha}(\sum_{i=1}^{n} x_i)(nc-2)! + b(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 (nc-3)!$$

$$\frac{\partial R(\hat{\alpha},\alpha)}{\partial \hat{\alpha}} = 2b\hat{\alpha}(nc-1)! - 2b(\sum_{i=1}^{n} x_i)(nc-2)! = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(nc-1)} \qquad \text{.......................... (10)}$$

3-2 طريقة بيز الثانية Bayes Method The second [3]

يتم التوسع في معلومات جفري المسبقة على إن دالة $g(\alpha)$ تتناسب طرديا مع معلومات فيشر Fisher information والمرفوعة إلى القوة c1 وكما يلي :

$$g(\alpha) \propto [I(\alpha)]^{c1} = \frac{k(nc)^{c1}}{\alpha^{2c1}} \qquad \text{.......................... (11)}$$

$$\therefore H(x_1,x_2,..,x_n;\alpha,c)=\frac{k(nc)^{c1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}}{\alpha^{nc+2c1}[(c-1)!]^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\alpha}\right) \quad \text{.............. (12)}$$

$$P(x_1,x_2,..,x_n)=\int_0^\infty H(x_1,x_2,..,x_n;\alpha,c)d\alpha$$

$$=\frac{k(nc)^{c1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}(nc+2c1-2)!}{[(c-1)!]^n(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{nc+2c-1}} \quad \text{...................... (13)}$$

$$\therefore \Pi(\alpha\mid x_1,x_2,..,x_n)=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{nc+2c-1}}{\alpha^{nc+2c1}(nc+2c1-2)!}*\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\alpha}\right) \quad \text{......... (14)}$$

وباستعمال دالة الخسارة والتي هي : $\ell(\hat{\alpha},\alpha)=b(\hat{\alpha}-\alpha)^2$

وباستخدام دالة المخاطرة Risk function لإيجاد تقدير بيز

$$R(\hat{\alpha},\alpha)=E(\ell(\hat{\alpha},\alpha)) \quad \text{..................(15)}$$

$$=\int_0^\infty \ell(\hat{\alpha},\alpha)\prod(\alpha\mid x_1,x_2,..,x_n)d\alpha$$

$$=\int_0^\infty b(\hat{\alpha}-\alpha)^2*\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{nc+2c-1}}{\alpha^{nc+2c1}(nc+2c1-2)!}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\alpha}\right)d\alpha$$

$$R(\hat{\alpha},\alpha)=b\hat{\alpha}^2-\frac{2b\hat{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}x_i)}{(nc+2c1-2)}+\frac{b(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{(nc+2c1-2)(nc+2c1-3)}$$

$$\frac{\partial R(\hat{\alpha},\alpha)}{\partial \hat{\alpha}} = 2b\hat{\alpha} - \frac{2b(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{(nc+2c1-2)} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(nc+2c1-2)} \qquad \text{......................... (16)}$$

3-3 طريقة بيز الثالثة The Third Bayes Method [1] , [3]

في عام 2002 قدم البياتي دالة مخاطرة واستخدم هذه الدالة في توزيع ويبل Weibull Distribution وهذه الدالة هي:

$$\ell(\hat{\alpha},\alpha) = \alpha^{c2}(\hat{\alpha}-\alpha)^2 \qquad ,\text{........................ (17)}$$

وفي هذا البحث أستخدم الباحث هذه الدالة لتقدير معلمة القياس لتوزيع Erlang وكما يلي:

$$R(\hat{\alpha},\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha^{c2}(\hat{\alpha}-\alpha)^2 \Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n) d\alpha \qquad \text{..................... (18)}$$

وبالاعتماد على $\Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n)$ لطريقة بيز الأولى والثانية وكما يلي:

(a) بالاعتماد على $\Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n)$ لطريقة بيز الأولى وكما يلي:

$$R(\hat{\alpha},\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha^{c2}(\hat{\alpha}-\alpha)^2 * \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nc}}{\alpha^{nc+1}} \exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}) \qquad \text{..................... (19)}$$

$$= \hat{\alpha}^2 (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{c2} (nc-c2-1)! - 2\hat{\alpha} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{c2+1} (nc-c2-2)! + (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{c2+2} (nc-c2-3)!$$

$$\frac{\partial R(\hat{\alpha},\alpha)}{\partial \hat{\alpha}} = 2\hat{\alpha} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{c2} (nc-c2-1)! - 2(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{c2+1} (nc-c2-2)! = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes3} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{(nc-c2-1)} \qquad \text{...................... (20)}$$

(b)بالاعتماد على $\Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n)$ لطريقة بيز الثانية وكما يلي:

$$R(\hat{\alpha},\alpha)=\int_0^{\infty}\alpha^{c2}(\hat{\alpha}-\alpha)^2 * \frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{nc+2c-1}}{\alpha^{nc+2c1}(nc+2c1-2)!}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\alpha}) \quad \text{...... (21)}$$

$$=\frac{\hat{\alpha}^2(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{c2}(nc+2c1-c2-2)!}{(nc+2c1-2)!}-\frac{2\hat{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{c2+1}(nc+2c1-c2-3)!}{(nc+2c1-2)!}+\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{c2+2}(nc+2c1-c2-4)!}{(nc+2c1-2)!}$$

$$\frac{\partial R(\hat{\alpha},\alpha)}{\partial\hat{\alpha}}=\frac{2\hat{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{c2}(nc+2c1-c2-2)!}{(nc+2c1-2)!}-\frac{2(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{c2+1}(nc+2c1-c2-3)!}{(nc+2c1-2)!}=0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes\,4}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)}{(nc+2c1-c2-2)} \quad \text{........................ (22)}$$

(c) افتراض الباحث أن c2=2 وأيضا بالاعتماد على $\Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n)$ لطريقة بيز الأولى وكما يلي:

$$\ell(\hat{\alpha},\alpha)=\alpha^2(\hat{\alpha}-\alpha)^2 \quad \text{............................ (23)}$$

$$R(\hat{\alpha},\alpha)=\int_0^{\infty}\alpha^2(\hat{\alpha}-\alpha)^2 * \frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{nc}}{\alpha^{nc+1}}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\alpha}) \quad \text{................ (24)}$$

$$R(\hat{\alpha},\alpha)=\hat{\alpha}^2(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2(nc-3)!-2\hat{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^3(nc-4)!+(\sum_{i=1}^{n}x_i)^4(nc-5)!$$

$$\frac{\partial R(\hat{\alpha},\alpha)}{\partial\hat{\alpha}}=2\hat{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2(nc-3)!-2(\sum_{i=1}^{n}x_i)^3(nc-4)!=0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes5} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(nc-3)} \qquad \text{.................. (25)}$$

α	C1	C2
0.6	1	0.4
		1.4
	1.5	0.4
		1.4

(d) افتراض الباحث أن c2=2 $\Pi(\alpha \mid x_1, x_2, .., x_n)$ وأيضا بالاعتماد على لطريقة بيز الثانية وكما يلي:

$$\ell(\hat{\alpha}, \alpha) = \alpha^2 (\hat{\alpha} - \alpha)^2$$

$$R(\hat{\alpha}, \alpha) = \int_0^{\infty} \alpha^2 (\hat{\alpha} - \alpha)^2 * \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{nc+2c-1}}{\alpha^{nc+2c1} (nc + 2c1 - 2)!} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}\right) d\alpha \quad \text{..... (26)}$$

وبعد اشتقاق $R(\hat{\alpha}, \alpha)$ بالنسبة الى $\hat{\alpha}$ ومساواتها للصفر ينتج لنا:

$$\hat{\alpha}_{Bayes6} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(nc - 2c1 - 4)} \qquad \text{.......................... (27)}$$

4-**الجانب التجريبي**

تم استخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا, حيث يتم توليد البيانات نظريا من دون الحصول عليها عمليا إذ يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- تحديد القيم الافتراضية: تم اختيار ثلاثة حجوم للعينات هي(25 ,50 ,100) واسُتخدمت قيم افتراضية للمتغير العشوائي x_i تم تثبيت معلمة الشكل C عند 2 إي إن $C = 2$ إما بقية القيم فكانت كما في الجدول التالي:

1.1	1	0.4
		1.4
	1.5	0.4
		1.4
1.6	1	0.4
		1.4
	1.5	0.4
		1.4

2- توليد البيانات:

1- تم توليد قيم المتغير العشوائي x_i وفق الصيغة التالية[6]:

$$x_i = -\alpha * Log(\prod_{i=1}^{n} u_i) \qquad \text{......................... (28)}$$

2- تم استخدام القيم المتغير x_i في الصيغ المتوصل إليها في نتائج التقدير النظرية في الجانب النظري.

3-مقياس المقارنة:تم الاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة التالية:

$$MSE(\hat{\alpha}) = \frac{\sum_{i=1}^{L} (\hat{\alpha} - \alpha)^2}{L} \qquad \text{..........................(29)}$$

إذ إن:

L= عدد مرات التجربة

$\hat{\alpha}$=مقدر الطريقة المعتمدة

α=القيمة حسب الأسلوب المستخدم

إذ تم تكرار التجربة إلى (1000) مرة.

5-الاستنتاجات

1- أظهرت نتائج البحث بأن طريقة تقدير بيز الثانية هي الأفضل من بقية طرائق التقدير الأخرى بالنسبة لأغلب القيم

2- احتلت طريقة بيز الرابعة المرتبة الثانية على أفضلية طرائق التقدير لأغلب القيم الافتراضية ولجميع حجوم العينات.

3- تتقارب نتائج التقدير لطريقة بيز الأولى مع نتائج التقدير لطريقة بيز الرابعة لأغلب القيم الافتراضية ولجميع حجوم العينات.

4- جاءت طريقة بيز الخامسة والسادسة في المرتبة الأخيرة ضمن نتائج التقدير ولجميع حجوم العينات.

5- بينت النتائج بأن مجموع مربعات الخطأ MSE يقل كلما ازداد حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية.

6- **التوصيات**

1- يوصي الباحث باعتماد طريقة تقدير بيز الثانية لتقدير معلمة القياس لتوزيع Erlang.

2- يوصي الباحث بتوسيع نطاق الدراسة لتشمل تقدير المعلمتين لتوزيع Erlang بالاعتماد على طرائق بيزية وتقليدية.

7- **الجداول**

الجداول أدناه تبين نتائج التقدير لحجوم العينات (25 , 50 , 100) وكما يلي:

جدول رقم (1)

يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لحجم عينة (25)

α	C1	C2	Bayes1	Bayes2	Bayes3	Bayes4	Bayes5	Bayes6	الأفضل
0.6	1	0.4	1.620028E-02	0.0153337	1.664867E-02	1.563837E-02	1.909557E-02	1.948143E-02	Bayes4
		1.4	1.620028E-02	0.0153337	1.804874E-02	1.664867E-02	1.909557E-02	1.641686E-02	Bayes1
	1.5	0.4	1.620028E-02	1.479879E-02	1.664867E-02	1.497534E-02	1.909557E-02	1.948143E-02	Bayes2
		1.4	1.620028E-02	1.479879E-02	1.804874E-02	1.563837E-02	1.909557E-02	1.641686E-02	Bayes2
1.1	1	0.4	5.445096E-02	5.153822E-02	5.595803E-02	5.256224E-02	6.418236E-02	6.547932E-02	Bayes2
		1.4	5.445096E-02	5.153822E-02	6.066382E-02	5.595803E-02	6.418236E-02	5.517893E-02	Bayes2
	1.5	0.4	5.445096E-02	4.974032E-02	5.595803E-02	5.033379E-02	6.418236E-02	6.547932E-02	Bayes2
		1.4	5.445096E-02	4.974032E-02	6.066382E-02	5.256224E-02	6.418236E-02	5.517893E-02	Bayes2
1.6	1	0.4	0.1152019	0.1090397	0.1183906	0.1112061	0.1357907	0.1385346	Bayes2
		1.4	0.1152019	0.1090397	0.1283467	0.1183906	0.1357907	0.1167421	Bayes2
	1.5	0.4	0.1152019	0.1052357	0.1183906	0.1064913	0.1357907	0.1385346	Bayes2
		1.4	0.1152019	0.1052357	0.1283467	0.1112061	0.1357907	0.1167421	Bayes2

جدول رقم (2)

يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لحجم عينة (50)

α	C1	C2	Bayes1	Bayes2	Bayes3	Bayes4	Bayes5	Bayes6	الأفضل

0.6	1	0.4	7.816863E-03	7.593262E-03	7.929146E-03	7.673097E-03	8.516745E-03	8.606458E-03	Bayes2
		1.4	7.816863E-03	7.593262E-03	8.269721E-03	7.929146E-03	8.516745E-03	7.871335E-03	Bayes2
	1.5	0.4	7.816863E-03	7.447517E-03	7.929146E-03	7.496762E-03	8.516745E-03	8.606458E-03	Bayes2
		1.4	7.816863E-03	7.447517E-03	8.269721E-03	7.673097E-03	8.516745E-03	7.871335E-03	Bayes2
1.1	1	0.4	2.627336E-02	2.552178E-02	2.665076E-02	2.579014E-02	0.0286257	2.892728E-02	Bayes2
		1.4	2.627336E-02	2.552178E-02	2.779546E-02	2.665076E-02	0.0286257	2.645643E-02	Bayes2
	1.5	0.4	2.627336E-02	2.503192E-02	2.665076E-02	2.519743E-02	0.0286257	2.892728E-02	Bayes2
		1.4	2.627336E-02	2.503192E-02	2.779546E-02	2.579014E-02	0.0286257	2.645643E-02	Bayes2
1.6	1	0.4	0.0555866	5.399651E-02	5.638508E-02	5.456428E-02	6.056352E-02	6.120143E-02	Bayes2
		1.4	0.0555866	5.399651E-02	5.880693E-02	5.638508E-02	6.056352E-02	5.597394E-02	Bayes2
	1.5	0.4	0.0555866	5.296006E-02	5.638508E-02	5.331028E-02	6.056352E-02	6.120143E-02	Bayes2
		1.4	0.0555866	5.296006E-02	5.880693E-02	5.456428E-02	6.056352E-02	5.597394E-02	Bayes2

جدول رقم (3)

يبين نتائج التقدير لمتوسط مربعات الخطأ(MSE) لحجم عينة (100)

α	C1	C2	Bayes1	Bayes2	Bayes3	Bayes4	Bayes5	Bayes6	الأفضل
0.6	1	0.4	3.897721E-03	3.850076E-03	3.922104E-03	3.866872E-03	4.05099E-03	4.070702E-03	Bayes2
		1.4	3.897721E-03	3.850076E-03	3.996694E-03	3.922104E-03	4.05099E-03	3.909526E-03	Bayes2
	1.5	0.4	3.897721E-03	3.821005E-03	3.922104E-03	3.83044E-03	4.05099E-03	4.070702E-03	Bayes2
		1.4	3.897721E-03	3.821005E-03	3.996694E-03	3.866872E-03	4.05099E-03	3.909526E-03	Bayes2
1.1	1	0.4	1.310066E-02	1.294053E-02	1.318262E-02	1.299699E-02	1.361581E-02	1.368208E-02	Bayes2
		1.4	1.310066E-02	1.294053E-02	1.343333E-02	1.318262E-02	1.361581E-02	1.314035E-02	Bayes2
	1.5	0.4	1.310066E-02	1.284283E-02	1.318262E-02	1.287452E-02	1.361581E-02	1.368208E-02	Bayes2
		1.4	1.310066E-02	1.284283E-02	1.343333E-02	1.299699E-02	1.361581E-02	1.314035E-02	Bayes2
1.6	1	0.4	2.771712E-02	2.737832E-02	2.789049E-02	2.749774E-02	2.880701E-02	2.894721E-02	Bayes2
		1.4	2.771712E-02	2.737832E-02	2.842093E-02	0.0278905	2.880701E-02	2.780107E-02	Bayes2
	1.5	0.4	2.771712E-02	2.717159E-02	2.789049E-02	2.723868E-02	2.880701E-02	2.894721E-02	Bayes2
		1.4	2.771712E-02	2.717159E-02	2.842093E-02	2.749774E-02	2.880701E-02	2.780107E-02	Bayes2

8- المصادر

1- ألبياتي, حسام نجم عبود, (2002),"مقارنة تقدير لنموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة "أطروحة دكتوراه, كليةالإدارة والاقتصاد , جامعة بغداد.

2- Abdul Haq and Dey, S., (2011),"Bayesian Estimation Of Erlang Distribution Under Different Prior Distributions", Journal of Reliability and Statistical Studies ,vol.4 pp 1-30.

3- Al Omari , Mohammed , Salim ,H. and Akma,N.,(2010),"comparison of the Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for the Weibull Distribution" ,Journal of Mathematics and Statistics,p.100-104.

4- Bhattacharyya, S.K. and Singh, N.K., (1994). Bayesian estimation of the traffic intensity in M/Ek/1 queue Far. East, J. Math Sci., 2, p. 57-62.

5- Damodaran, D., Gopal, G. and Kapur, P. K. (2010)" A Bayesian Erlang software reliability Model" Communication in Dependability and Quality Management , pp. 82-90.

6- Evans, M.,Hastings, N. and Peacock,B.,(1993),"Statistical Distribution", John Wiley &sons , INC.

7-Harischandra, K., Rao, S. S. (1988). "A note on statistical inference about the traffic intensity parameter in M/Ek/1 queue", Sankhya B, 50, p. 144-148.

8- Jain, Sudha (2001)"Estimating the change point of Erlang interarrival time distribution" , INFOR, Technology Publications.

9- Karoblis, A.,(2002),"The Approximation of Sum of Independent Distributions By The Erlang Distribution Function ", Non linear Modeling and Control vol.7 pp55-60.

10- Nair, N., Muraleedharan, G. and Kurup , P.,G.,(2003),"Erlang Distribution Model For Ocean Wave Periods", Journal India Geophysics Union vol.7 pp 59-70.

11- Suri, P.K, Bhushan, Bharat and Jolly, Ashish (2009). Time estimation for project management life cycles:A simulation approach. International Journal of Computer Science and Network Security, 9(5), p. 211-215

12- Tabatabaei, R. and Shanthikumar,(2010), "Application Of Erlang Distribution In Cycle Time Estimation Of Toolsets With Wip-Dependent arrival and Service In A single Product-Type single Failure –Type environment ", Proceedings of the Simulation Conference.

13- Thomopoulos,N. and Plumchitchom,N.,(2006),"The Queuing Theory of the Erlang Distributed Inter arrival and Service Time ", Journal OF Research In Engineering and Technology.vol.3 N0.4.