استخدام المحاكاة في مقارنة عدة مقدرات لمعلمة القياس لتوزيع ويبل ذي المعلمتين وحساب كفاءة المقدرات مع تطبيق عملي

الباحثة أزهار عزيز عبداللطيف **الباحثة منتهى خضير عباس**

المعهد التقني / ميسان **الكلية التقنية الإدارية / بغداد**

المستخلص

يتضمن البحث تقدير معلمة القياس (θ) لتوزيع ويبل ذي المعلمتين $\{WE(\lambda,\theta)\}$، حيث تشير (λ) الى معلمة الشكل و (θ) الى معلمة القياس (بأعتبار أن معلمة الشكل λ معلومة) والمقدرات هي الأمكان الأعظم ومقدر $(Minimax^{[1]})$ ومقدر بيزي ثالث للمعلمة (θ) تحت دالة خسارة أسية خطية معدلة، وكذلك أشتقاق صيغ لتباين المقدرات، ومقارنة كفائتها. وأجريت تجارب محاكاة وقورنت النتائج بواسطة المقياس الأحصائي متوسط مربعات الخطأ $[mean\ square\ error\ (MSE)]$، والسبب في دراسة توزيع ويبل لأنه يمثل أحد توزيعات الوقت المستغرق للأشتغال في الوحدات المنتجة لحين حصول الفشل. أن معرفة توزيع الوقت المستغرق لحين الفشل يعد مهماً جداً لأنه يساهم في تقدير متوسط هذا الوقت، و سيكون مؤشراً عند الأدارة لتحديد أوقات الصيانة، وتحديد معولية المكائن وغيرها. وسيتم عرض نتائج المحاكاة في جداول خاصة.

Abstract

The paper deals with estimating the scale parameter of well known distribution of studying the failure time during the operating time until failure, which always appear in life testing experiments (Weibull failure model). The estimation methods are maximum likelihood and minimax estimator and Bayes estimator according to modified linear exponential loss function (MLINEX[4]). Also the variance of estimators are derived to compare the efficiency of estimators of scale parameter θ. The comparison is done through simulation experiment , and all results are shown in tables.

Keywords: *Two parameters weibull distribution, maximum likelihood estimator, minimax estimator (d_1), and Bayes estimator (d_2).*

1 - الجانب النظري

تمثل الدالة الاحتمالية (1)، توزيع ويبل الاحتمالي ذي المعلمتين (λ, θ) حيث تشير (λ) الى معلمة الشكل، و (θ) الى معلمة القياس.

$$f(t;\lambda,\theta) = \frac{\lambda\, t^{\lambda-1}}{\theta}\, e^{-\frac{t^{\lambda}}{\theta}} \qquad x,\lambda,\theta > 0 \qquad (1)$$

$$0 \qquad o/w$$

وأن الدالة الاحتمالية التراكمية لهذا التوزيع هي:

$$F(t_i) = \left(1 - e^{-\frac{t_i^{\lambda}}{\theta}}\right) \qquad (2)$$

أضافة لما تقدم، يمكن أن نبرهن أن الصيغة العامة للعزم الرائي حول نقطة الأصل هي $E(t^r)$

$$E(T^r) = \theta^{\frac{r}{\lambda}}\, \Gamma\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right), \quad r = 1,2,.. \qquad (3)$$

ومنها نجد أن المتوسط هو:

$$\mu = E(T) = \theta^{\frac{1}{\lambda}}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \qquad (4)$$

وأن التباين:

$$var(T) = E(T^2) - [E(T)]^2$$

$$\sigma_T^2 = \theta^{\frac{2}{\lambda}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] \qquad (5)$$

ويمكن تعريف دالة المعولية لتوزيع ويبل (1):

$$R(t) = pr(T > t) = \int_t^{\infty} \frac{\lambda}{\theta}\, u^{\lambda-1}\, e^{-\frac{u^{\lambda}}{\theta}}\, du$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^{\lambda}}{\theta}} \qquad (6)$$

وعندئذ يكون معدل الفشل $(Hazard\ rate)$:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda}{\theta}\, t^{\lambda-1} \qquad (7)$$

وهو دالة متزايدة عندما $(\lambda > 1)$ ومتناقصة عندما $(\lambda < 1)$ وثابتة عندما $(\lambda = 1)$.

2 ـ طرائق تقدير معلمة القياس

أولاً- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method[2]

لتكن لدينا عينة كاملة من أوقات الفشل $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ من توزيع $\{WE(\lambda,\theta)\}$ المعرّف بالمعادلة (1)، فأن دالة الأمكان الأعظم هي:

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n, \lambda, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \lambda, \theta)$$
$$= \frac{\lambda^n}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} t_i^{\lambda-1} \; e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\lambda}}{\theta}} \qquad (8)$$

وبإدخال اللوغاريتم على المعادلة (8) نحصل على:

$$\ln L = n \ln \lambda - n \ln \theta + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\lambda}}{\theta} \quad (9)$$

وباعتبار أن (λ معلمة الشكل معلومة) نشتق المعادلة (9) بالنسبة الى (θ) ونساوي المشتقة مع الصفر، نحصل على مقدر الأمكان الأعظم $(\hat{\theta}_{MLE})$.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda}}{\theta^2} = 0$$

وعليه يكون مقدر الأمكان الأعظم هو:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda}}{n} \qquad (10)$$

ويمكن استخراج مقدر دالة المعولية باعتبار λ معلومة من المعادلة (6):

$$R(t) = e^{-\frac{t^{\lambda}}{\theta}}$$
$$\hat{R}(t) = exp\left[-\frac{t^{\hat{\lambda}}}{\hat{\theta}_{MLE}}\right] \qquad (11)$$

ثانياً- مقدر Minimax[6]

يعتمد هذا المقدر بالأساس على نظرية $Lehmann's\ Theorem$، فأذا كانت لدينا عائلة من دوال التوزيعات $(\tau = F_{\theta},\ \theta \in \Theta)$ من دوال التوزيع (D) فأن، $(d^* \in D)$ يسمى مقدر بيز للمعلمة (θ) في ظل وجود توزيع أولي للمعلمة (θ) هو $[\xi^*(\theta)]$ وأن هذا المقدر يعمل على تقليل أعظم خسارة متوقعة $(minimax)$ بافتراض وجود دالة خسارة تربيعية صيغتها هي:

$$L = loss = \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2$$

وسوف نوجد المقدر (d_1^*) بأعتبار أن (θ) متغير عشوائي له توزيع أولي هو كاما $(Gamma)$ ومعرف بالدالة:

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \; \theta^{-(\alpha+1)} \; e^{-\frac{1}{\beta\theta}} \quad \alpha, \beta, \theta > 0 \qquad (12)$$

ولابد أولاً من أيجاد التوزيع اللاحق للمعلمة (θ) بوجود عينة عشوائية $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ والمعرف بالمعادلة:

$$\pi(\theta|\underline{t}) = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha+n+1} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)}}{\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha+n+1} e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda}}{\theta} + \frac{1}{\theta\beta}\right)} d\theta} \qquad (13)$$

وبعد أجراء التكامل والاختصار وجد أن:

$$\pi(\theta|\underline{t}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha+n+1} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)} \qquad (14)$$

$$\pi(\theta|\underline{t}) \sim Gamma\left(n+\alpha,\ \sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)$$

وطبقاً لدالة الخسارة التربيعية:

$$L = loss = \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2$$

تكون الخسارة المتوقعة $Ri\ (d,\theta)$:

$$Risk\ (d,\theta) = E(loss) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2 \pi(\theta|t)d\theta$$

$$= \pi(\theta|t) - 2d_1 E\left(\frac{1}{\theta}\middle| t\right) + d_1^2 E\left(\frac{1}{\theta^2}\middle| t\right)$$

$$\frac{\partial R(d,\theta)}{\partial d} = -2E\left(\frac{1}{\theta}\middle| t\right) + 2d_1 E\left(\frac{1}{\theta^2}\middle| t\right)$$

$$d_1^* = \frac{E\left(\frac{1}{\theta}\middle|t\right)}{E\left(\frac{1}{\theta^2}\middle|t\right)} \qquad (15)$$

وبعد استخراج هذه التوقعات، حيث أن:

$$E\left(\frac{1}{\theta}\middle| t\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta}\ \pi(\theta|t)d\theta$$

$$E\left(\frac{1}{\theta}\middle| t\right) = \left(\frac{n+\alpha}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}}\right) \qquad (16)$$

$$E\left(\frac{1}{\theta^2}\middle| t\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^2}\ \pi(\theta|t)d\theta$$

$$= \left(\frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}{(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta})^2}\right) \qquad (17)$$

ومن المعادلتين (16) و (17) نجد أن مقدر $Minimax$ للمعلمة (θ) هو (d_1^*):

$$d_1^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}}{n+\alpha+1}\right) \qquad (18)$$

ويختصر الى:

$$d_1^* = k_1\ \left(T + \frac{1}{\beta}\right)$$

حيث أن:

$$k_1 = \left(\frac{1}{n+\alpha+1}\right) , \quad T = \sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda}$$

ثالثاً: مقدر بيز[4] للمعلمة (θ) تحت دالة الخسارة الأسية الخطية المعدلة (modified linear exponential loss function (MLINEX))، وتعرف هذه الدالة بالمعادلة:

$$L(\theta, d_2) = w\left[\left(\frac{d_2}{\theta}\right)^{c} - c\ \ln\left(\frac{d_2}{\theta}\right) - 1\right] \qquad (19)$$

حيث أن (d_2) هو المقدر الثالث للمعلمة (θ)، وأن (w, c) ثوابت معلومة في دالة الخسارة.

ومن صيغة المعادلة (19) يكون مقدر الـ $Minimax$ للمعلمة (θ)هو (d_2):

$$d_2 = [E(\theta^{-c})]^{-\frac{1}{c}} \qquad (20)$$

علماً بأن:

$$E(\theta^{-c}) = \int_0^{\infty} \theta^{-c}\, \pi(\theta|t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{-(\alpha+n+c+1)} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)}\, d\theta$$

$$E(\theta^{-c}) = \frac{\Gamma(n+\alpha+c)}{\Gamma(n+\alpha)} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right)^{-c} \qquad (21)$$

ومن المعادلة (20) يكون المقدر الثالث لمعلمة القياس (θ) هو:

$$d_2 = k_2 \left(T + \frac{1}{\beta}\right) \qquad (22)$$

$$k_2 = \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{\frac{1}{c}}$$

ولمقارنة كفاءة المقدرين (d_1^*) و (d_2)، نستخرج تباين كل منهما حيث أن:

$$var(d_1^*) = \frac{1}{(n+\alpha+1)^2}\ var\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right] \qquad (23)$$

$$var\ (d_2) = \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{\frac{2}{c}} var\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right] \qquad (24)$$

وعليه فأن كفاءة (d_2) نسبة الى (d_1^*) هي:

$$E(d_1^*, d_2) = \frac{\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{\frac{2}{c}} var\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right]}{\frac{1}{(n+\alpha+1)^2}\, var\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^{\lambda} + \frac{1}{\beta}\right]}$$

$$E(d_1^*, d_2) = \frac{\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{\frac{2}{c}}}{\frac{1}{(n+\alpha+1)^2}}$$

وعندما $(c = 1)$ فأن:

$$E = \frac{(n+\alpha+1)^2}{(n+\alpha)^2} > 1$$

وعندما $(c = -1)$ فأن:

$$E = \frac{(n+\alpha+1)^2}{(n+\alpha-1)^2} > 1$$

وبما أن $(E > 1)$، لقيمتي $(c = -1, c = 1)$، فأن كفاءة مقدر بيز تحت دالة الخسارة التربيعية وهو (d_1^*) أكثر من كفاءة المقدر (d_2).

وعلى غرار كفاءة المقدرين (d_1^*, d_2) يمكن أيجاد كفاءة مقدر الأمكان الأعظم $(\hat{\theta}_{MLE})$ مع المقدرين (d_1^*, d_2^*)حيث :

$$E\left(d_1^*, \hat{\theta}_{MLE}\right) = \frac{n^2}{(n+\alpha+1)^2}$$

وهنا يبدو أن $\hat{\theta}_M$ هو أكفأ من d_1^*.

3 - تجارب المحاكاة Simulation Experiments

لغرض المقارنة بين المقدرات الثلاث لمعلمة القياس (θ) نفذت تجارب محاكاة عند حجوم عينات $(n = 10, 25, 50, 100)$ وكررت كل تجربة $(L = 500)$، وتم توليد البيانات من التوزيع المنتظم وتحويلها الى بيانات تتبع توزيع ويبل ذي المعلمتين وبأستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل العكسية :

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$$

$$u = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$$

$$e^{-\frac{t}{\theta}} = 1 - u$$

$$-\frac{t}{\theta} = \ln(1-u)$$

$$t_i = -\theta \ \ln(1-u_i) \qquad 0 \le u_i \le 1 \qquad (25)$$

وتطبق المعادلة (25) في توليد البيانات لحجوم عينات مختلفة هي، $(n = 10, 25, 50, 100)$، وعند قيم متفرقة هي $(\lambda = 1, \theta = 1)$ وأعطاء قيم الى معلمة الشكل للتوزيع الأولي هي $(\alpha = 0.5, 1, 1.5)$ وقيم لـ هي $(\beta = 0.5, 1, 1.5)$، واستخرجت مقدرات معلمة القياس الثلاث للمعلمة (θ) من تطبيق المعادلات (22, 18, 10) وأعتمدت المقياس الأحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة، ونفذت تجارب المحاكاة على قيم (t_i) المولدة من المعادلة (25)، واعطيت قيم أفتراضية لثابت جيفري هي $(c = -1, 1, -2, 2)$ وكذلك أستخرجت كفاءة المقدرات وأعتمد البرنامج $(Matlab - 7.10 - R2010a)$ في عملية توليد البيانات والجداول التالية توضح نتائج المقدرات.

الجدول (1)

مقدرات ومتوسط مربعات الخطأ لمعلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 10)$.

α	β	c	θ_{MLE}	$MSE(\theta)$	d_1^*	$MES(d_1^*)$	d_2	$MSE(d_2)$
0.5	0.5	-1	0.98921	0.0099786	1.03410	0.0076527	1.25180	0.0173842
		1	0.98765	0.0099996	1.03273	0.0076567	1.13109	0.0107745
		-2	1.00073	0.0098812	1.04411	0.0076662	1.33621	0.0235404
		2	0.97717	0.0097587	1.02363	0.0073954	1.07126	0.0085464
	1	-1	1.01482	0.0097392	0.96941	0.0074412	1.17350	0.0137772
		1	0.97253	0.0091179	0.93263	0.0072912	1.02145	0.0082477
		-2	0.99340	0.0093471	0.95079	0.0073067	1.21677	0.0162688

		2	1.00407	0.0105543	0.96006	0.0081388	1.00474	0.0087415
	1.5	-1	1.01024	0.0102493	0.93644	0.0081460	1.13358	0.0131294
		1	1.00451	0.0099164	0.93146	0.0079665	1.02017	0.0090333
		-2	0.99537	0.0103822	0.92351	0.0084338	1.18187	0.0161621
		2	0.97433	0.0110298	0.90522	0.0091887	0.94734	0.0093571
1	0.5	-1	1.00219	0.0090418	1.00183	0.0062791	1.20219	0.0131296
		1	0.99319	0.0098327	0.99433	0.0068283	1.08472	0.0088401
		-2	1.01595	0.0104513	1.01329	0.0072579	1.28172	0.0195210
		2	1.02228	0.0106854	1.01856	0.0074204	1.06385	0.0084652
	1	-1	1.00490	0.0100297	0.92075	0.0075915	1.10490	0.0111276
		1	1.00955	0.0108880	0.92463	0.0081229	1.00868	0.0089983
		-2	0.97931	0.0081936	0.89942	0.0066719	1.13769	0.0109522
		2	0.97922	0.0098890	0.89935	0.0078504	0.93934	0.0078269
	1.5	-1	1.00357	0.0096952	0.89186	0.0079013	1.07023	0.0101872
		1	0.99130	0.0101420	0.88164	0.0084387	0.96179	0.0085216
		-2	0.99911	0.009066	0.88814	0.0081307	1.12342	0.0125305
		2	1.00932	0.0100301	0.89666	0.0080273	0.93653	0.0079948
1.5	0.5	-1	0.99885	0.0087008	0.95908	0.0057359	1.14176	0.0099014
		1	1.01027	0.0104532	0.96822	0.0067843	1.05241	0.0081708
		-2	1.01761	0.0103936	0.97409	0.0066992	1.21914	0.0151907
		2	1.01274	0.0086598	0.97020	0.0056207	1.01150	0.0060262
	1	-1	1.00493	0.0100079	0.88394	0.0077504	1.05231	0.0093489
		1	0.99986	0.0098334	0.87989	0.0077360	0.95640	0.0076255
		-2	1.03215	0.0112674	0.90572	0.0080339	1.13357	0.0129761
		2	0.97243	0.0090687	0.85795	0.0077732	0.89447	0.0073694
	1.5	-1	0.97921	0.0099808	0.83670	0.0090267	0.99607	0.0090152
		1	1.02217	0.0099808	0.87107	0.0079595	0.94681	0.0077228
		-2	1.00655	0.0098883	0.85857	0.0079479	1.07456	0.0098727
		2	1.00084	0.0097987	0.85401	0.0084025	0.89036	0.0080184

الجدول (2)

كفاءة طرق تقدير معلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 10)$.

α	β	c	$eff(d_2, d_1^*)$	$eff(d_1^*, \theta)$	$eff(d_2, \theta)$
0.5	0.5	-1	1.46537	0.756144	1.10803
		1	1.19955	0.756144	0.90703
		-2	1.63777	0.756144	1.23839
		2	1.09524	0.756144	0.82816
	1	-1	1.46537	0.756144	1.10803
		1	1.19955	0.756144	0.90703
		-2	1.63777	0.756144	1.23839
		2	1.09524	0.756144	0.82816
	1.5	-1	1.46537	0.756144	1.10803
		1	1.19955	0.756144	0.90703
		-2	1.63777	0.756144	1.23839

		2	1.09524	0.756144	0.82816
1	0.5	-1	1.44000	0.694444	1.00000
		1	1.19008	0.694444	0.82645
		-2	1.60000	0.694444	1.11111
		2	1.09091	0.694444	0.75758
	1	-1	1.44000	0.694444	1.00000
		1	1.19008	0.694444	0.82645
		-2	1.60000	0.694444	1.11111
		2	1.09091	0.694444	0.75758
	1.5	-1	1.44000	0.694444	1.00000
		1	1.19008	0.694444	0.82645
		-2	1.60000	0.694444	1.11111
		2	1.09091	0.694444	0.75758
1.5	0.5	-1	1.41723	0.640000	0.90703
		1	1.18147	0.640000	0.75614
		-2	1.56642	0.640000	1.00252
		2	1.08696	0.640000	0.69565
	1	-1	1.41723	0.640000	0.90703
		1	1.18147	0.640000	0.75614
		-2	1.56642	0.640000	1.00252
		2	1.08696	0.640000	0.69565
	1.5	-1	1.41723	0.640000	0.90703
		1	1.18147	0.640000	0.75614
		-2	1.56642	0.640000	1.00252
		2	1.08696	0.640000	0.69565

الجدول (3)

مقدرات ومتوسط مربعات الخطأ لمعلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 25)$.

α	β	c	θ_{MLE}	$MSE(\theta)$	d_1^*	$MES(d_1^*)$	d_2	$MSE(d_2)$
0.5	0.5	-1	1.00577	0.0016178	1.02431	0.0014623	1.10793	0.0021491
		1	0.99593	0.0016389	1.01503	0.0014671	1.05483	0.0016049
		-2	0.99756	0.0016136	1.01657	0.0014469	1.12271	0.0023537
		2	1.00551	0.0015975	1.02407	0.0014439	1.04395	0.0015537
	1	-1	1.00560	0.0017058	0.98642	0.0015245	1.06694	0.0019541
		1	0.99655	0.0014724	0.97788	0.0013295	1.01623	0.0014253
		-2	0.99896	0.0014232	0.98015	0.0012824	1.08248	0.0018171
		2	1.00389	0.0017501	0.98480	0.0015663	1.00393	0.0016188
	1.5	-1	0.99962	0.0016602	0.96819	0.0015181	1.04723	0.0018179
		1	0.99879	0.0018150	0.96741	0.0016578	1.00535	0.0017456
		-2	1.00266	0.0015481	0.97107	0.0014111	1.07245	0.0018902
		2	0.98880	0.0014993	0.95799	0.0014005	0.97659	0.0014040
	0.5	-1	0.99511	0.0016702	0.99547	0.0014319	1.07511	0.0018949
		1	0.99132	0.0016488	0.99196	0.0014135	1.03011	0.0015578
		-2	1.00029	0.0015325	1.00027	0.0013139	1.10257	0.0020172

1		2	0.99417	0.0015996	0.99461	0.0013714	1.01355	0.0014302
	1	-1	0.99818	0.0018003	0.96128	0.0016034	1.03818	0.0018585
		1	0.99509	0.0015422	0.95842	0.0013905	0.99528	0.0014258
		-2	0.99368	0.0015174	0.95711	0.0013732	1.05499	0.0017000
		2	0.99368	0.0014533	0.95711	0.0013182	0.97543	0.0013168
	1.5	-1	1.00002	0.0015305	0.95064	0.0014096	1.02669	0.0015590
		1	1.01424	0.0018033	0.96380	0.0015915	1.00087	0.0016598
		-2	0.99897	0.0015482	0.94967	0.0014287	1.04679	0.0017003
		2	0.99791	0.0016164	0.94869	0.0014910	0.96676	0.0014832
1.5	0.5	-1	1.00637	0.0015203	0.98761	0.0012612	1.06507	0.0016291
		1	0.99431	0.0017322	0.97664	0.0014523	1.01350	0.0015478
		-2	0.99841	0.0016794	0.98037	0.0014033	1.07862	0.0019272
		2	1.00595	0.0014791	0.98722	0.0012278	1.00568	0.0012686
	1	-1	0.99818	0.0015528	0.94380	0.0014096	1.01782	0.0015051
		1	0.98615	0.0014639	0.93286	0.0013838	0.96807	0.0013368
		-2	1.00125	0.0015560	0.94659	0.0014000	1.04146	0.0016253
		2	0.99800	0.0018107	0.94364	0.0016234	0.96128	0.0016128
	1.5	-1	0.99989	0.0016449	0.93323	0.0015377	1.00643	0.0015827
		1	0.99233	0.0018113	0.92636	0.0017119	0.96131	0.0016698
		-2	0.98748	0.0015653	0.92195	0.0015321	1.01435	0.0015679
		2	0.99754	0.0015188	0.93110	0.0014449	0.9480	0.0014085

الجدول (4)

كفاءة طرق تقدير معلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 25)$.

α	β	c	$eff(d_2, d_1^*)$	$eff(d_1^*, \theta)$	$eff(d_2, \theta)$
0.5	0.5	-1	1.16993	0.889996	1.04123
		1	1.07997	0.889996	0.96117
		-2	1.21971	0.889996	1.08554
		2	1.03922	0.889996	0.92490
	1	-1	1.16993	0.889996	1.04123
		1	1.07997	0.889996	0.96117
		-2	1.21971	0.889996	1.08554
		2	1.03922	0.889996	0.92490
	1.5	-1	1.16993	0.889996	1.04123
		1	1.07997	0.889996	0.96117
		-2	1.21971	0.889996	1.08554
		2	1.03922	0.889996	0.92490
1	0.5	-1	1.16640	0.857339	1.00000
		1	1.07840	0.857339	0.92456
		-2	1.21500	0.857339	1.04167
		2	1.03846	0.857339	0.89031
	1	-1	1.16640	0.857339	1.00000
		1	1.07840	0.857339	0.92456
		-2	1.21500	0.857339	1.04167

		2	1.03846	0.857339	0.89031
	1.5	-1	1.16640	0.857339	1.00000
		1	1.07840	0.857339	0.92456
		-2	1.21500	0.857339	1.04167
		2	1.03846	0.857339	0.89031
1.5	0.5	-1	1.16301	0.826446	0.96117
		1	1.07690	0.826446	0.89000
		-2	1.21048	0.826446	1.00040
		2	1.03774	0.826446	0.85763
	1	-1	1.16301	0.826446	0.96117
		1	1.07690	0.826446	0.89000
		-2	1.21048	0.826446	1.00040
		2	1.03774	0.826446	0.85763
	1.5	-1	1.16301	0.826446	0.96117
		1	1.07690	0.826446	0.89000
		-2	1.21048	0.826446	1.00040
		2	1.03774	0.826446	0.85763

الجدول (5)

مقدرات ومتوسط مربعات الخطأ لمعلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 50)$.

α	β	c	θ_{MLE}	$MSE(\theta)$	d_1^*	$MSE(d_1^*)$	d_2	$MSE(d_2)$
0.5	0.5	-1	0.99737	0.0003536	1.00716	0.0003342	1.04785	0.0004064
		1	1.00159	0.0003774	1.01125	0.0003582	1.03127	0.0003895
		-2	1.01028	0.0003864	1.01969	0.0003700	1.07177	0.0005032
		2	1.00625	0.0004194	1.01578	0.0003995	1.02579	0.0004157
	1	-1	1.00925	0.0004245	0.99927	0.0003995	1.03964	0.0004628
		1	0.98612	0.0004044	0.97681	0.0003883	0.99616	0.0003930
		-2	1.00710	0.0003776	0.99718	0.0003551	1.04811	0.0004384
		2	0.99230	0.0003604	0.98282	0.0003445	0.99250	0.0003465
	1.5	-1	1.00442	0.0004727	0.98811	0.0004480	1.02804	0.0004976
		1	0.99789	0.0003677	0.98177	0.0003532	1.00121	0.0003604
		-2	1.00348	0.0004075	0.98720	0.0003872	1.03762	0.0004524
		2	0.99709	0.0003601	0.98099	0.0003465	0.99066	0.0003477
1	0.5	-1	0.99348	0.0004301	0.99373	0.0003976	1.03348	0.0004517
		1	1.00215	0.0003894	1.00207	0.0003600	1.02171	0.0003836
		-2	1.00211	0.0004065	1.00203	0.0003758	1.05269	0.0004702
		2	0.99637	0.0004117	0.99651	0.0003806	1.00623	0.0003886
	1	-1	1.00137	0.0004265	0.98209	0.0004007	1.02137	0.0004356
		1	0.99857	0.0003816	0.97940	0.0003612	0.99860	0.0003667
		-2	0.99091	0.0003957	0.97203	0.0003800	1.02118	0.0004111
		2	1.01685	0.0004068	0.99697	0.0003710	1.00670	0.0003790
	1.5	-1	1.01314	0.0003922	0.98700	0.0003628	1.02648	0.0004028
		1	1.00452	0.0003697	0.97871	0.0003505	0.99790	0.0003550
		-2	1.00432	0.0004127	0.97852	0.0003904	1.02799	0.0004364

		2	1.00786	0.0004315	0.98192	0.0004043	0.99150	0.0004070
1.5	0.5	-1	1.00567	0.0003987	0.99588	0.0003614	1.03532	0.0004152
		1	1.00052	0.0004277	0.99097	0.0003896	1.01022	0.0004052
		-2	0.98985	0.0003816	0.98081	0.0003516	1.02990	0.0003974
		2	1.00318	0.0004448	0.99351	0.0004041	1.00311	0.0004113
	1	-1	0.99539	0.0003674	0.96703	0.0003546	1.00533	0.0003603
		1	0.99468	0.0004039	0.96636	0.0003884	0.98513	0.0003846
		-2	1.00194	0.0004187	0.97327	0.0003940	1.02199	0.0004283
		2	0.99583	0.0003869	0.96745	0.0003718	0.97680	0.0003682
	1.5	-1	1.00689	0.0003862	0.97164	0.0003655	1.01012	0.0003797
		1	1.00668	0.0004132	0.97144	0.0003903	0.99031	0.0003905
		-2	1.00072	0.0004053	0.96576	0.0003911	1.01410	0.0004093
		2	1.00512	0.0004332	0.96996	0.0004105	0.97933	0.0004086

الجدول (6)

كفاءة طرق تقدير معلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 50)$.

α	β	c	$eff(d_2, d_1^*)$	$eff(d_1^*, \theta)$	$eff(d_2, \theta)$
0.5	0.5	-1	1.08244	0.942596	1.02030
		1	1.04000	0.942596	0.98030
		-2	1.10476	0.942596	1.04134
		2	1.01980	0.942596	0.96126
	1	-1	1.08244	0.942596	1.02030
		1	1.04000	0.942596	0.98030
		-2	1.10476	0.942596	1.04134
		2	1.01980	0.942596	0.96126
	1.5	-1	1.08244	0.942596	1.02030
		1	1.04000	0.942596	0.98030
		-2	1.10476	0.942596	1.04134
		2	1.01980	0.942596	0.96126
1	0.5	-1	1.08160	0.924556	1.00000
		1	1.03960	0.924556	0.96117
		-2	1.10367	0.924556	1.02041
		2	1.01961	0.924556	0.94268
	1	-1	1.08160	0.924556	1.00000
		1	1.03960	0.924556	0.96117
		-2	1.10367	0.924556	1.02041
		2	1.01961	0.924556	0.94268
	1.5	-1	1.08160	0.924556	1.00000
		1	1.03960	0.924556	0.96117
		-2	1.10367	0.924556	1.02041
		2	1.01961	0.924556	0.94268
	0.5	-1	1.08078	0.907029	0.98030
		1	1.03921	0.907029	0.94260
		-2	1.10261	0.907029	1.00010

1.5		2	1.01942	0.907029	0.92464
	1	-1	1.08078	0.907029	0.98030
		1	1.03921	0.907029	0.94260
		-2	1.10261	0.907029	1.00010
		2	1.01942	0.907029	0.92464
	1.5	-1	1.08078	0.907029	0.98030
		1	1.03921	0.907029	0.94260
		-2	1.10261	0.907029	1.00010
		2	1.01942	0.907029	0.92464

الجدول (7)

مقدرات ومتوسط مربعات الخطأ لمعلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 100)$.

α	β	c	θ_{MLE}	$MSE(\theta)$	d_1^*	$MSE(d_1^*)$	d_2	$MSE(d_2)$
0.5	0.5	-1	0.99960	0.0000965	1.00453	0.0000938	1.02472	0.0001035
		1	1.00656	0.0001024	1.01139	0.0001003	1.02145	0.0001055
		-2	1.00350	0.0000962	1.00838	0.0000939	1.03385	0.0001094
		2	1.00875	0.0000961	1.01355	0.0000944	1.01858	0.0000970
	1	-1	0.99470	0.0000945	0.98985	0.0000924	1.00975	0.0000961
		1	0.99554	0.0000931	0.99069	0.0000911	1.00054	0.0000920
		-2	1.00075	0.0000969	0.99581	0.0000942	1.02097	0.0001032
		2	0.99751	0.0001036	0.99262	0.0001010	0.99755	0.0001015
	1.5	-1	1.00023	0.0000972	0.99202	0.0000949	1.01196	0.0000996
		1	0.99984	0.0000996	0.99163	0.0000974	1.00150	0.0000987
		-2	0.99684	0.0000892	0.98868	0.0000878	1.01366	0.0000928
		2	0.99692	0.0000871	0.98875	0.0000857	0.99366	0.0000857
1	0.5	-1	0.99722	0.0000976	0.99727	0.0000938	1.01722	0.0001005
		1	1.00690	0.0000927	1.00677	0.0000891	1.01674	0.0000932
		-2	1.00522	0.0001036	1.00512	0.0000996	1.03038	0.0001136
		2	1.00444	0.0000987	1.00435	0.0000949	1.00931	0.0000965
	1	-1	1.00235	0.0001096	0.99250	0.0001059	1.01235	0.0001111
		1	0.99869	0.0000976	0.98891	0.0000950	0.99870	0.0000956
		-2	0.99765	0.0001061	0.98789	0.0001034	1.01273	0.0001088
		2	1.00748	0.0001004	0.99753	0.0000961	1.00246	0.0000970
	1.5	-1	0.99505	0.0001024	0.98208	0.0001014	1.00172	0.0001022
		1	1.00009	0.0000966	0.98702	0.0000945	0.99679	0.0000948
		-2	1.00868	0.0000982	0.99544	0.0000939	1.02046	0.0001026
		2	0.99368	0.0001036	0.98073	0.0001029	0.98557	0.0001023
1.5	0.5	-1	1.00828	0.0000973	1.00319	0.0000920	1.02316	0.0001010
		1	1.00019	0.0000991	0.99530	0.0000945	1.00511	0.0000964
		-2	1.00379	0.0000914	0.99881	0.0000869	1.02380	0.0000969
		2	0.99853	0.0001014	0.99369	0.0000969	0.99857	0.0000975
	1	-1	0.99576	0.0000928	0.98123	0.0000917	1.00076	0.0000917
		1	1.00676	0.0000911	0.99196	0.0000869	1.00174	0.0000880
		-2	0.99924	0.0000988	0.98462	0.0000964	1.00925	0.0000996

		2	0.98960	0.0000857	0.97522	0.0000867	0.98001	0.0000853
	1.5	-1	1.00495	0.0001090	0.98695	0.0001052	1.00659	0.0001081
		1	1.00607	0.0001041	0.98803	0.0001002	0.99777	0.0001008
		-2	1.00179	0.0000963	0.98386	0.0000943	1.00846	0.0000970
		2	1.00412	0.0001078	0.98614	0.0001044	0.99098	0.0001043

الجدول (8)

كفاءة طرق تقدير معلمة القياس (θ) عندما $(\lambda = 1)$ عند حجم العينة $(n = 100)$.

α	β	c	$eff(d_2, d_1^*)$	$eff(d_1^*, \theta)$	$eff(d_2, \theta)$
0.5	0.5	-1	1.04061	0.970662	1.01008
		1	1.02000	0.970662	0.99007
		-2	1.05117	0.970662	1.02033
		2	1.00995	0.970662	0.98032
	1	-1	1.04061	0.970662	1.01008
		1	1.02000	0.970662	0.99007
		-2	1.05117	0.970662	1.02033
		2	1.00995	0.970662	0.98032
	1.5	-1	1.04061	0.970662	1.01008
		1	1.02000	0.970662	0.99007
		-2	1.05117	0.970662	1.02033
		2	1.00995	0.970662	0.98032
1	0.5	-1	1.04040	0.961169	1.00000
		1	1.01990	0.961169	0.98030
		-2	1.05091	0.961169	1.01010
		2	1.00990	0.961169	0.97069
	1	-1	1.04040	0.961169	1.00000
		1	1.01990	0.961169	0.98030
		-2	1.05091	0.961169	1.01010
		2	1.00990	0.961169	0.97069
	1.5	-1	1.04040	0.961169	1.00000
		1	1.01990	0.961169	0.98030
		-2	1.05091	0.961169	1.01010
		2	1.00990	0.961169	0.97069
1.5	0.5	-1	1.04020	0.951814	0.99007
		1	1.01980	0.951814	0.97066
		-2	1.05065	0.951814	1.00003
		2	1.00985	0.951814	0.96119
	1	-1	1.04020	0.951814	0.99007
		1	1.01980	0.951814	0.97066
		-2	1.05065	0.951814	1.00003
		2	1.00985	0.951814	0.96119
	1.5	-1	1.04020	0.951814	0.99007
		1	1.01980	0.951814	0.97066
		-2	1.05065	0.951814	1.00003

		2	1.00985	0.951814	0.96119

4 - الجانب التطبيقي

البيانات التالية تمثل أوقات الأشتغال لحين الفشل وبالأشهر لطاحونة تكسير الكلس في معمل سمنت الفلوجة الأبيض وهو من المعامل التابعة لوزارة الصناعة والمعادن، التي تنتج هذه المادة المهمة لأنجاز أعمال تكميلية أخرى في البناء، تدخل في السيراميك، والكاشي وغيرها، وكانت أوقات الأشتغال لحين الفشل هي 25 مشاهدة. والتي تمثل توزيع $(Weibull)$ ذي المعلمتين (λ, θ).

1.2838	4.5766	2.4193	2.336	2.485
3.9921	3.942	3.267	1.7829	0.824
3.9605	2.501	1.8306	2.24112	1.1651
2.140	1.67	2.7943	2.783	3.065
1.185	1.910	3.432	2.9006	1.4998

وأن معلمة القياس $(\theta = 1.354)$ ومعلمة الشكل $(\lambda = 1.378)$، وتم تقسيم البيانات الى خمسة فئات، وعليه تكون درجة الحرية عند تطبيق صيغة أختبار مربع كاي χ^2 :

$$\chi^2_{5-2-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

وتمثل O_i التكرارات المشاهدة، وتمثل E_i التكرارات المتوقعة.

$$t_{min} = 0.824 \quad t_{max} = 4.5766$$

$$Range = t_{max} - t_{min} + 1 = 4.5766 - 0.824 + 1 = 4.7526$$

نفرض أن عدد الفئات $(k = 5)$

$$length\ class = \frac{Range}{k} = \frac{4.7526}{5} = 0.95052$$

$Classes$	f_i	$Expected$	$(O_i - E_i)^2/E_i$
0.824 - 1.77452	6	5.001	0.19956
1.77452 - 2.72504	9	10.5333	0.22319
2.72504 - 3.6756	5	4.3613	0.093535
3.6756 - 4.62608	4	4.4012	0.03657
4.62608 – 5.5766	1	0.7625	0.07397
$Total$	25	25	0.626825

ولأختبار الفرضية أن أوقات الأشتغال لحين الفشل هو متغير عشوائي يتبع توزيع ويبل ذي المعلمتين.

$H_0: Data\ is\ assumed\ weibull\ (\lambda, \theta)$

وأن:

$$\theta = 1.354 \quad \lambda = 1.378$$

أن صيغة أحصاءة الأختبار هي:

$$\chi^2_{5-2-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0.626825$$

وجد أن (χ^2) المحسوبة أصغر من الجدولية $(\chi^2_{5-2-1} = 5.99)$، لذلك نقبل الفرضية التي تنص على توزيع الوقت المستغرق لحين الفشل لعمل طاحونات تكسير حجر الكلس هو توزيع ويبل بمعلمة قياس $(\theta = 1.354)$ ومعلمة شكل $(\lambda = 1.378)$، وأن متوسط هذا الوقت المتوقع هو:

$$\mu = E(T) = \theta^{\frac{1}{\lambda}} \lambda \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= (1.354)^{\frac{1}{1.378}} (1.378) \left(1 + \frac{1}{1.378}\right) = 1.1045$$

أي أن متوسط الوقت المستغرق للأشتغال لحين الفشل هو (1.1045) شهر ومقدر هذا الوقت ضروري لأنه يعتبر مؤشر جيد يساعد الأدارة في تحديد أوقات الصيانة.

الأستنتاجات

1 – لوحظ في جميع الجداول ولقيم $(\lambda = 1)$ و $(n = 10, 25, 50, 100)$، أن متوسط مربعات الخطأ للمقدر الثالث وهو (d_2) ولجميع الثوابت كان الأصغر من بين متوسطي مربعات الخطأ للمقدر (d_1^*) ومقدر الأمكان الأعظم، وهذا يدل على أفضلية المقدرات هي المقدر (d_2) يليه المقدر (d_1^*) ومن ثم مقدر الأمكان الأعظم $(\hat{\theta}_{MLE})$.

2 – وجد أن كفاءة المقدرين (d_1^*, d_2) عند مقارنتهما مع بعضهما هي أعلى من كفاءة مقارنة المقدر (d_1^*) مع $(\hat{\theta}_{MLE})$ وكذلك كفاءة مقارنة المقدر (d_2) مع $(\hat{\theta}_{MLE})$.

3 – وجد أن متوسط وقت الأشتغال لحين الفشل $(\mu = 1.1045)$ شهر، ولابد للشركة من متابعة المكائن وأجراء الصيانة الوقائية قبل مرور شهر لكي تتفادى العطلات الكبيرة.

التوصيات

1- أستخدام مقدرات بيز في ظل دوال خسارة مختلفة، لأنها توظف كل المعلومات السابقة المتوفرة عن المعلمة (θ) عند التقدير.

2 – أعتماد مقدر $minimax$ لأنه يعمل على تقليل أعظم خسارة متوقعة يمكن أن يقع فيها الباحث.

3 – تطوير البحث وأعتبار أن معلمة الشكل (λ) أيضاً مجهولة، وتقديرها ولو أن تقديرها يتطلب طرائق عددية للحصول على المقدرات ومن ثم أعتماد $(\hat{\lambda})$ المقدرة في التوصل الى $(\hat{\theta})$ وبالتالي الى مقدر المعولية $(\hat{R})$.

REFRENCES

[1] Al-athari, Faris M. Hassan, Dhwyia S. Ibrahim Nathier A. (2012), "Using Decision Theory Approach to build a model for Bayesian Sampling Plans" American Journal of Mathematics and Statistics. Vol. 2, No.6.

[2] Cheng K. Lee Miin-Jye Wen, (2009)" A Multivariate Weibull Distribution "Pak.j.stat.oper.res. Vol.V No.2, pp55-66.

[3] Choudhury, A. (2005). "A Simple Derivation of Moments of the Exponentiated Weibull Distribution". Metrika ***62*** *(1): 17–22.*

[4] D. Cousineau, (2009) " Fitting the three-parameter weibull distribution: review and evaluation of existing and new methods" [CiTO] Dielectrics and Electrical Insulation, IEEE Transactions on, Vol. 16, No. 1. pp. 281-288, doi:10.1109/TDEI.2009.4784578.

[5] Dey, S. (2008), " Minimax estimation of the parameter of the Rayleigh distribution under quadratic loss function", Data Science Journal, Vol. – 7 pp. 23 – 30.

[6] E. Dick. "Generalized renewal process for repairable systems based on finite Weibull mixture" (2007) [CiTO] Reliability Engineering and System Safety, Vol. 93, No. 10. (2008), pp. 1461-1472, doi:10.1016/j.ress.2007.10.003.

[7] Gong, Z. (2005),"Estimation of mixed Weibull distribution parameters using SCEN-UA algorithm: Application and comparison with MLE in automotive reliability analysis" Reliability engineering and system safety, pp.1- 8.

[8] Gupta, R. D. & Kunda, D. (1999), "Generalized exponential distribution", Australia and New Zeeland Journal of Statistics, 41, 173 – 188.

[9] Hassun. Dhwiya. Salman, Ibrahim. Nathier. Abas, Albadri. Faten Farouq. (2012), "Decision Making with applications", Al- jazeera Bureau and publishing
(1677). Baghdad. Iraq.

[10] Hassun. Dhwiya. Salman, Ibrahim. Nathier. Abas, Albadri. Faten Farouq. (2012), " Proposed Methods for Estimating Parameters of the Generalized Raylieh Distribution in the Presence of One Outlier ", American Journal of Mathematics and Statistics. Vol. 2, No.6.

[11] Hassun. Dhwiya. Salman, Ibrahim. Nathier. Abas, Abood. Suhail Najim. (2012), "Categorical Data Analysis", Al- jazeera Bureau and publishing (1873). Baghdad. Iraq.

[12] L. Pace, A. Salvan, L. Ventura, (2006),"Likelihood-based discrimination between separate scale and regression models" [CiTO] Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 136, No. 10. (Oct 2006), pp. 3539-3553.

[13] Nadarajah, S.; Gupta, A.K. (2005). "On the Moments of the Exponentiated Weibull Distribution". Communications in Statistics: Theory and Methods ***34*** *(2): 253–256.*
[14] Nassar, M.M.; Eissa, F.H. (2003). "On the exponentiated Weibull distribution". Commun Stat Theory Meth ***32****: 1317–1336.*

[15] Pal, M.; Ali, M.M.; Woo, J. (2006). "Exponentiated Weibull distribution". Statistica 66 (2): 139–147.
[16] Roy, M. K. Podder, C. K. & Bhuiyan, K. J. (2002),"Minimax estimation of the scale parameter of the Weibull distribution for the quadratic and MLINEX loss functions", Jahangirnagar University Journal of Science, 25, 277 – 285.