مقارنة بعض طرائق تقديـــر توزيع كاما ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة

أ.د. محمد صادق عبد الرزاق الدوري أ.م.صبا زكي إسماعيل العباسي(*)
كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة بغداد

المستخلص

يتضمن البحث تقدير دالة توزيع كاما ذو المعلمتين ، حيث تم التطرق إلى العديد من الطرائق الإحصائية المستخدمة في هذا البحث لإيجاد التقديرات النقطية (Point Estimation) والذي يعرف بإيجاد قيمة عددية واحدة تستعمل لتقدير معلمة المجتمع المناظرة . وذلك باستخدام نوعين من الطرائق ، أولهما ، الطرائق الكلاسيكية (التقليدية) كطريقة العزوم وطريقة الإمكان الأعظم . ثانيهما ، الطرائق التي تعتمد على الطرائق البيزية وذلك باعتماد أسلوب التقدير البيزي من خلال الاستناد على ثلاثة دوال خسارة مختلفة ، اثنتان منها مقترحة ، فضلا عن استخدام طريقة الـ (Minimax) . ومن خلال المحاكاة تبين أن الطريقة الأفضل تتمثل بمقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة) (The Bayes Estimator And The Prior Distribution Is According Inverted Gamma Distribution)(Proposed) ، باستعمال المعيارين ، متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error) (MSE) ، ومتوسط مربعات الخطأ المطلق النسبي (MAPE) (Mean Absolute Percentage Error) .

Abstract

Estimation includes for Two parameters gamma distribution function , where they were addressed to many of the statistical methods used in this research to find point estimates (Point Estimation) , Which is known to finding a single numerical value used to estimate the corresponding parameter of the community . Using the two types of methods , Firstly , Classical methods as a method of moments and the Maximum Likelihood Method . Second , Bayesian Estimators and by Bayesian Estimation Approach through rely on three different loss functions , two of which are proposed , in addition to the use of the Minimax Estimation method .

(*) جزء مستل من اطروحة دكتوراه للباحثة الثانية .

Through simulation shows that the best method is The Bayes Estimator And The Prior Distribution Is According Inverted Gamma Distribution (Proposed) . Using the criteria , Mean Square Error (MSE) , and , Mean Absolute Percentage Error (MAPE) .

١.المقدمة (Introduction)

يعد علم الإحصاء من العلوم التي تمتلك ميادين كثيرة للتطبيق في مختلف المجالات ، فهو يستخدم في المجال الطبي والمجال الهندسي وبقية المجالات الأخرى كالإدارة والزراعة والاقتصاد والتربية وعلم النفس . ويُعد ميدان السيطرة النوعية احد هذه المجالات باعتباره مجالاً يُعَدُّ واحداً من ركائز النهضة الصناعية ، بل سبباً يجري اعتماده لتفسير حركة التطور الصناعي في البلدان المتقدمة .

إن تقدير أوقات الفشل للأجهزة هو من الأهمية العليا في محيط التقنية الحديثة وتطوراتها المستقبلية ، وتحديد مستوى أداءها ، كما انه من الطبيعي أن سلوك الفشل يختلف باختلاف أنواع الأجهزة المستعملة . إذ نحصل من خلاله على مجموعة بيانات تمثل أوقات الحياة لهذه الأجهزة . وان هذه الأوقات تتبع توزيعات إحصائية معينة ، ومن هذه التوزيعات هو توزيع كاما ذو المعلمتين ، الذي يعد احد نماذج الفشل التي تبحث في أداء عمل أجهزة تخطيط القلب الكهربائي .

ان هذا البحث سلَّط الأضواء على أوقات الفشل ، وان هذه الأوقات تتبع توزيعات إحصائية معينة ، ومن هذه التوزيعات هو توزيع كاما ذو المعلمتين ، الذي يعد احد نماذج الفشل التي تبحث في أداء عمل أجهزة تخطيط القلب الكهربائي . وبهدف تقدير دالة هذا التوزيع فلقد تم التطرق إلى العديد من الطرائق الإحصائية المستخدمة في هذه الدراسة لإيجاد التقديرات النقطية (Point Estimation) له. وان هذه الطرائق قامت على محورين ، أولهما ، الطرائق الكلاسيكية (التقليدية) (Classical Methods) كطريقة العزوم (Method Of Moments) وطريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) . وثانيهما ، المقدرات البيزية (Bayesian Estimators) ، وذلك باعتماد أسلوبين ، أولهما ، أسلوب التقدير البيزي (Bayesian Estimation Approach) من خلال الاستناد على ثلاثة دوال خسارة مختلفة ، اثنتان منها مقترحة ، وثانيهما ، استخدام طريقة الـ (Minimax Estimation) .

وبغية تحديد الطريقة التي تبوأت مركز الصدارة بعد إجراء المقارنة بينها ، فلقد تم اعتماد الجانب التجريبي من خلال أسلوب المحاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو وإجراء عدة تجارب لتقدير معلمة القياس (θ) لدالة توزيع كاما ذي المعلمتين (Two Parameter Gamma Distribution) ، من خلال الاعتماد على قيم مقاييس الكفاءة الإحصائية المتمثلة بكلاً من متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) .

١.١ هدف البحث (Aim Of The Research)

تحقيقاً لهدف البحث المتمثل في إجراء مقارنة بين عدة طرائق مبحوثة لتقدير معلمة الشكل لتوزيع كاما ذي المعلمتين ، واختيار الأفضل منها على وفق الأسس النظرية ذات العلاقة ، لأوقات اشتغال أجهزة تخطيط القلب الكهربائي (Electro Cardio Graph) لحين الفشل . تم مايأتي :-

١. أخذت بيانات فعلية (حقيقية) لأوقات اشتغال أجهزة تخطيط القلب الكهربائي لحين الفشل ، والمتوفرة في إحدى عشر مستشفى من مستشفيات القطر والكائنة في محافظة بغداد ، بجانبيها الكرخ والرصافة .
٢. تم فحص هذه البيانات واختبار توزيعها عن طريق حساب إحصاءه الاختبار (χ^2-Test) وجد أنها تخضع لتوزيع كاما ذي المعلمتين (Two Parameter Gamma Distribution) ، وهو توزيع وقت الاشتغال لحين الفشل.
٣. تم عمل محاكاة لاختيار ومقارنة عدة طرائق لتقدير معلمة الشكل لتوزيع كاما ، وباستخدام طرائق مقترحة تبين أن الطريقة الأفضل تتمثل بمقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة) (The Bayes Estimator And The Prior Distribution Is According Inverted Gamma Distribution)(Proposed) ، والتي تعد ضمن طريقة المقدرات البيزية (Bayesian Estimators) باعتماد أسلوب التقدير البيزي (Bayesian Estimation Approach) ، باستعمال المعيارين ، متوسط مربعات الخطأ (MSE) (Mean Square Error) ، ومتوسط مربعات الخطأ المطلق النسبي (MAPE) (Mean Absolute Percentage Error) .
٤. مساهمة الباحثة ، تمثلت بـإضافة مُقَدِّر جديد لمعلمة التوزيع وتبين انه الأفضل من بين ستة مقدرات من خلال معيارين هما (MSE) و (MAPE) .

١. طرائق التقدير لمعلمات توزيع كاما ذي المعلمتين

يعد التقدير (The Estimation) احد المرتكزين الأساسيين للاستدلال الإحصائي ، إذ تكمن أهميته في تقدير معلمات النموذج للمجتمع الذي تم توفيقه بموجب الإحصائيات التي أفرزتها العينة المسحوبة منه .

هنالك مدرستان لتقدير المعلمات ، الأولى ، تعرف بالمدرسة الكلاسيكية (Classical School) ، في حين ، الثانية ، تسمى مدرسة بيز (Bayesian School) .

وتتباين المبادئ أو الاتجاهات الأساسية التي تقوم عليها كل مدرسة ، واللتان تسيران في اتجاهين متضادين لتقويم نظرية بيز ما بين المعارض والمؤيد ، ليستمر النقاش بين أصحاب هاتين المدرستين ويتطور عبر السنين لتدعم كل مدرسة رأيها بالدليل والبرهان محاولة دحض الرأي الآخر .

وفي هذا المبحث سيتم التطرق إلى عدة طرائق متباينة والتي أفرزتها كلتا المدرستين ، وذلك بهدف تقدير معلمات دالة الفشل التي تتبع توزيع كاما ذي المعلمتين بغية تحديد أفضل مقدِّر وذلك ليتم اعتماده في الجانب التطبيقي من هذه الدراسة .

٢.١ الطرائق التقليدية (Classical Methods)

إن المبدأ الأساسي لهذه الطرائق في التقدير مبني على افتراض مفاده أن المعلمات المطلوب تقديرها عبارة عن ثوابت مجهولة القيمة (Fixed Unknown) ، ويتم تقديرها في ضوء معطيات العينة المشاهدة فقط .

وان الطرائق التقليدية التي سيتم تناولها في هذا البحث ، هي كما يأتي :-

٢.١.١ طريقة العزوم [٨][٩][٦][١٠][١١] (Method Of Moments) (MM)

تعد هذه الطريقة من طرائق التقدير التقليدية الشائعة الاستخدام في حقل تقدير المعلمات ، إذ أنها تتصف بسهولتها . وفكرة هذه الطريقة تعتمد على مساواة عزوم المجتمع المقدرة (M_j) (مجهولة) مع عزوم العينة (m_j) (معلومة) ، يعقبها حل المعادلات الناتجة بغية الحصول على الصيغ التقديرية للمعلمات .

لنفرض لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n)$ تتوزع وفق توزيع كاما (Gamma Distribution) بمعلمتين (P,θ) .

إن العزوم عبارة عن إحصاءات ، فهي دوال في العينة المشاهدة $(t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n)$ ، لذلك من الممكن استخدامها لتقدير المعلمات $(\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_K)$ ، بواسطة مجموعة من المعادلات ، وإن الصيغة العامة لها هي كالتالي :-

$$M_j\left(\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k\right) = m_j\left(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

إذ أن $(j=1,2, \ldots\ldots, k)$ ، حيث (k) تمثل عدد معلمات التوزيع .

وان :-

$$M_j(\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k) = E(T^j) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$m_j(t_1, t_2, \ldots\ldots\ldots, t_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

إذ أن $(i=1,2, \ldots\ldots, n)$.

يمكن الحصول على تقدير لمعلمتي توزيع كاما (Gamma Distribution) بطريقة العزوم حول نقطة الأصل ، من خلال الاعتماد على العزمين الأولين فقط ، نظراً لوجود معلمتين (P,θ) .

إن عزوم العينة (Sample Moments) هي :-

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum t_i = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n} = \bar{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum t_i^2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

أما عزوم المجتمع (Population Moments) فهي :-

$$M_1(t) = E(t) = P\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$M_2(t) = E\left(t^2\right) = \theta^2 . P\left(P+1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

وبمساواة عزوم المجتمع (M_j) مع عزوم العينة (m_j) وحل المعادلات الناتجة ، يتم الحصول على مقدرات عزوم المجتمع ، وكما مبينة أدناه :-

$$m_1 = P\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$m_2 = \theta^2 P\,(P+1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

وبناءً عليه ، فان توزيع كاما (Gamma Distribution) يمتلك :-

$$\mu = Mean = M_1(t) = P\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\sigma^2 = Variance = M_2(t) - \mu^2 = \theta^2 .\, P\,(P+1) - P^2\,\theta^2 = P\,\theta^2 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

وبصدد مقدِّر العزوم بالنسبة لمعلمة الشكل (P) (Shape parameter) فيكون وفق الصيغة الآتية [١] :-

$$P_{MM} = \frac{(\bar{t}\,)^2}{S_t^{\,2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\,t_i - \bar{t}\,)^2}{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

حيث أن :- S^2 :- يمثل التباين (Variance) للعينة ، $\bar{t}$:- يمثل المتوسط الحسابي (Mean) للعينة . وان :-

$$Var\,(t) = S^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$E\,(t) = \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

أما مقدر العزوم بالنسبة لمعلمة القياس(θ) (Scale parameter) فهو :-

$$\theta_{MM} = \frac{S_t^{\,2}}{\bar{t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

٢.١.٢ طريقة الإمكان الأعظم [٦][٤][١١][١][١٠] Maximum Likelihood) (ML) (Method

لقد تم استخدام اصطلاح دالة الإمكان الأعظم لأول مرة من قبل الباحث [Fisher] عام (١٩٢٢)[٤]، ويعرف الاصطلاح بالصيغة العمومية الشائعة بدالة الإمكان الأعظم أو الأرجحية.

تعد هذه الطريقة من الطرائق المهمة في التقدير لأنها تمتلك خصائص جيدة كثيرة ، وتمتاز مقدَّراتها بدقة جيدة مقارنة مع طرائق التقدير الأخرى ، وان مبدأ هذه الطريقة يكمن في إيجاد قيمة تقديرية لمعلمة ما تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى .

وتعرّف بأنها دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (Joint Probability Density Function) للعينة ، لذا فإنها تتطلب المعرفة التامة بالتوزيع .

---

[١]) إن الحرفين الصغيرين اللذان يقعان إلى جانب المقدر يشيران إلى الطريقة المستخدمة في التقدير ، حيث انه للإشارة بالتقدير بأسلوب العزوم تم اختيار الحرفين (MM) للدلالة على ذلك .

إذا كانت $(t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots., t_n)$ هي مفردات عينة عشوائية بحجم (n) مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمالية معلومة $f(t;\theta)$ ، فان دالة الإمكان والتي يرمز لها بالرمز(L) ، هي وفق الصيغة الآتية :-

$$L = [\ f(t_1;\theta)\ .\ f(t_2;\theta)\ .f(t_3;\theta).\ \ldots\ldots\ldots\ .\ f(t_n;\theta)\ ] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\therefore\ L = \prod_{i=1}^{n} f\,(\,t_i\,;\theta\,) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

وللوصول إلى مقدرات الإمكان الأعظم لتوزيع كاما ، فان دالة الإمكان الأعظم للعينة ستحسب كما يأتي :-

$$f_T\,(\,t; p, \theta\,) = \frac{1}{\Gamma(p).\,\theta^{p}}\ t^{\,p-1}.\ \exp\,(-\frac{t}{\theta}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$Where\ \ :-\ \ (\,0 < t < \infty\,),\ (\,t > 0\,),\ (\,P > 0\,),\ (\theta > 0\,)$$

$$L\left(t_1, t_2, t_3, \ldots., t_n;\ p, \theta\right) = \frac{1}{[\Gamma(p)]^{n}\,[\theta^{np}]}.\exp\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}\right].\prod_{i=1}^{n} t_i^{\,p-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

إن تقديرات الإمكان الأعظم [٢] (P_{ML})،(θ_{ML}) لكل من (P) ، (θ)على التوالي يتم اختيارها بحيث أن :-

$$L(P_{ML}\,,\theta_{ML}) \geq L\,(P, \theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

وللحصول على هذه التقديرات يجب أن تكون المشتقتان الجزئيتان الأولى والثانية لدالة الإمكان الأعظم (L) بالنسبة للمعلمات (P,θ) متحققين دائماً (exist every where) .

وبما أن تعظيم دالة الإمكان (L) هو مساوٍ لتعظيم لوغاريتم دالة الإمكان (Ln L) فان معادلة لوغاريتم دالة الإمكان تكون بالصيغة الاتية :-

$$Ln\,L = -n\ Ln[\Gamma(P)] - np\,Ln(\theta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta} + (P-1).\sum_{i=1}^{n} Ln(t_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

وللحصول على المقدرات (P_{ML})،(θ_{ML}) ، نأخذ الاشتقاق الجزئي الأول للمعادلة أعلاه بالنسبة إلى (θ) أولاً ، ثم إلى (p) ثانياً، وبالتالي نجعل الناتج يساوي الصفر ، فنحصل على :-

$$\frac{\partial\,Ln\,L}{\partial\theta} = -\frac{n\hat{P}}{\hat{\theta}} + \frac{n\,\bar{t}}{\hat{\theta}^{2}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$\frac{\partial\,Ln\,L}{\partial P} = -n\ \frac{d}{d\,p}\,[Ln\,\Gamma(\hat{p})\,] - n\ Ln\,(\,\hat{\theta}\,) + \sum_{i=1}^{n} Ln\,(\,t_i\,) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

---

[٢]) **إن الحرفين الصغيرين اللذين يقعان إلى جانب المقدر يشيران إلى الطريقة المستخدمة في التقدير ، حيث انه للإشارة بالتقدير بطريقة الإمكان الأعظم تم اختيار الحرفين (ML) للدلالة على ذلك .**

إن المعادلتين الواردة في المنظومة أعلاه يصعب حلها بالأسلوب الاعتيادي وعليه سوف يتم استخدام إحدى طرق التحليل العددي (Numerical Analysis) والمتمثلة بطريقة نيوتن – رافسون (Newton – Raphson Process) .

حيث انه من المعادلة رقم (٢٣) يتم الحصول على أن :-

$$\hat{\theta} = \left[\frac{\bar{t}}{\hat{p}} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

وبتعويضها في المعادلة رقم (٢٤) نحصل على :-

$$\frac{d}{dp} Ln\, \Gamma(\hat{p}) - Ln\,(\hat{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ln\left(t_i\right) - Ln\,(\bar{t}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

$$\psi(\hat{p}) - Ln\,(\hat{p}) = Ln \left[\frac{(t_1 . t_2 . t_3 \;\ldots\ldots\; t_n)^{\frac{1}{n}}}{\bar{t}} \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$Where \quad \Psi(\hat{p}) = \frac{\Gamma'(\hat{P})}{\Gamma(\hat{P})} \quad Is\ Digamma\ Function\ .$$

$$\Psi(\hat{p}) - Ln\,(\hat{p}) = Ln\,(R) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

إذ أن :-

R :- تمثل نسبة الوسط الهندسي إلى الوسط الحسابي للعينة

. $(The\ Ratio\ of\ the\ Geometric\ to\ the\ Arithmetic\ Sample\ Mean)$

وبعد أن نحصل على القيمة التقديرية لـ $\left(\hat{P}\right)$ ، يصبح من السهل تقدير $\left(\hat{\theta}\right)$ من المعادلة رقم (25) .

عندئذ ، تم الحصول على مقدرات المعلمات $(\hat{\theta}, \hat{P})$ من الصيغ الواردة في منظومة المعادلات (23) و (24) المذكورة أعلاه . وعندما تعظم هذه المقدرات دالة الإمكان في الصيغة (20) عندها تكون $(\hat{\theta}, \hat{P})$ مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمات (P, θ) على التوالي .

ومن حقيقة كون الدالة اللوغاريتمية ذات صفة تزايدية رتيبة (Monotonic Increasing) فان قيم المعلمات (P,θ) التي تجعل دالة الإمكان (L) أعظم ما يمكن ، هي نفسها التي تجعل $(Ln(L))$ اكبر ما يمكن .

وبإيجاد الحلول للمعادلات رقم (23) و (24) نكون قد حصلنا على نقاط التقدير الحرجة لدالة الإمكان والتي تقع ضمن فترة التحدب لمنحنى هذه الدالة ، وبذلك تكون النقاط الحرجة نهاية عظمى ، والتي تحقق الشرط الثاني للتعظيم وهو :-

$$\left|\frac{\partial^2 Ln(L)}{\partial P^2}\right| < 0 \quad , \quad and \quad , \quad \left|\frac{\partial^2 Ln\,(L)}{\partial \theta^2}\right| < 0 \quad .... \quad (29)$$

أي أن المشتقة الجزئية الثانية لمعادلة لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة للمعلمات (P, θ) يجب أن تكون سالبة التحديد (Negative Definite) .

٢.٢ الطرائق البيزية [١٠][٣][١٠][٦][٧][٩][٥][١١] (Bayesian Methods)

يرجع الاهتمام بنظرية بيز إلى أواسط القرن الثامن عشر في عام (١٧٦٣) إذ نشرت مقالة للكاهن (Thomas Bayes) المولود في عام (١٧٠٢) والمتوفي في (١٧) نيسان من عام (١٧٦١) ، من قبل زميله (Richard Price) احد المهتمين بأعماله .

ومن مؤيدي مدرسة بيز كبار الإحصائيين الذين كتبوا بحوثاً ونشروا مؤلفات عديدة مستخدمين أسلوب بيز ومنهم { DeGroot (1970) , Harrison and Mike (1989) , Lindley (1965) , Raiffa and Schlaifer (1961) } .

وهكذا نجد العديد من الإحصائيين الكبار اهتموا باحصاءة بيز واستخدموه في مجالات عديدة في الحياة اليومية ، وفي هذه الدراسة ستستخدم الباحثة احصاءة بيز في مجال السيطرة النوعية .

ترتكز نظرية بيز في التقدير على افتراض أساسي مفاده بأن المعلمات المراد تقديرها عبارة عن متغيرات عشوائية (Random Variables) وليست كميات ثابتة ، وتتطلب الحصول على معلومات مسبقة (Prior Information) عنها ، والتي يتم استقاؤها من خلال تجارب سابقة أو من النظرية التي تحكم الظواهر المدروسة ، ومن ثم يتم صياغتها بهيئة توزيع احتمالي سابق (Prior Distribution) .

أما معلومات العينة المشاهدة (مشاهدات العينة الحالية) فتمثلها دالة الإمكان الأعظم ، وان طريقة بيز تتضمن ربط التوزيع الأولي (المسبق) للمعالم المحددة مع توزيع البيانات الحالية لإنتاج التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) للمعلمات ، إذ يشكل التوزيع اللاحق القاعدة لكل الاستدلال لأنه يحتوي على كل المعلومات ذات الصلة بمشكلة التقدير ، وتتضمن المعلومات ذات

الصلة كلا المعلومات المسبقة أو الشخصية والمجسدة في الدالة الاحتمالية الأولية وكذلك معلومات العينة الحالية والتي تمثلها دالة الإمكان الأعظم .

٢.٢.١ أسلوب التقدير البيزي (Bayesian Estimation Approach)

ينشأ أسلوب التقدير البيزي عن بعض بديهيات الاحتمالات الأساسية . ليكن (A) و(B) متغيرين عشوائيين فان الاحتمال المشترك (Joint probability) لهما $P(A,B)$ والذي يمكن أن يعبر عنه بدلالة الاحتمال الشرطي (Conditional Probability) $P(A|B)\, or\, P(B|A)$ والاحتمال الحدي (Marginal Probability) P(B) أو P(A) وكما مبين في الصيغتين الاتيتين :-

$$P(A\,,\,B)=P\,(A|\,B)*P\,(\,B\,)\quad ....\quad (30)$$
$$P(A\,,\,B)=P(B|\,A)*P(A)\quad ....\quad (31)$$
بوضع هاتين الصيغتين المتساويتين وإعادة ترتيبهما وباستخدام العمليات الرياضية الاعتيادية نحصل على ما يلي:-

$$P\,(B|\,A\,)=\frac{P\,(A|\,B\,)*P(\,B\,)}{P(A\,)}\quad ....\quad (32)$$

والآن عند الدراسة أو الاستدلال عن المعلمات لأي مجتمع إحصائي (أي أخذ مشاهدات عشوائية من هذا المجتمع لدراسة ظاهرة معينة في الحياة العملية) فان نظرية بيز المعطاة في الصيغة أعلاه يمكن أن يعبر عنها بصيغة أكثر وضوحاً وملائمة حول المعلمة (من معلمات المجتمع) المراد دراستها ، وكما يأتي :-

افرض أن $\left[\underset{-}{t}'=(\,t_1\,,t_2\,,t_3\,,\,....\,,\,t_n\,)\right]$ متجه لـ (n) من المشاهدات العشوائية والتي لها توزيع احتمالي $\left[f\,(\,\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta}\,)\right]$ يعتمد على متجه المعلمات غير المعرفة ذات البعد (p)
. $\left[\underset{-}{\theta}'=(\theta_1\,,\theta_2\,,\theta_3\,,\,....\,,\theta_p)\right]$

ولنفترض أيضاً أن المتغير العشوائي $(\underset{-}{\theta})$ له توزيع احتمالي $f\,(\theta)$ ، فان :-

$$f\,(\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta}\,)\,.\,f\,(\underset{-}{\theta})=f\,(\,\underset{-}{t}\,,\underset{-}{\theta}\,)=\;f\,(\,\underset{-}{\theta}\,|\,\underset{-}{t}\,)\,.\,f\,(\underset{-}{t})\quad ....\quad (33)$$

وبوجود البيانات المشاهدة $(\underset{-}{t})$ فان التوزيع الشرطي لـ $(\underset{-}{\theta})$ يكون بالشكل الاتي :-

$$h\,(\,\underset{-}{\theta}\,|\,\underset{-}{t}\,)=\frac{f\,(\,\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta}\,)\,.\,f\,(\,\underset{-}{\theta}\,)}{f\,(\underset{-}{t}\,)}\quad ....\quad (34)$$

إذ أن :- $f\,(\underset{-}{t})$ تمثل دالة توزيع حدي لـ $(\underset{-}{t})$ وهي ثابت ضروري لجعل التكامل أو المجموع للتوزيع اللاحق $h(\underset{-}{\theta}\,|\,\underset{-}{t})$ مساوي للواحد . وان $(\,f\,(\underset{-}{t})\neq 0\,)$.

الصيغة أعلاه عادة ما يشار إليها بنظرية بيز (Bayes Rule) . وان :-

$$f\left(\underset{-}{t}\right)=E\left[f\,\left(\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta}\right)\right]=\left\{\begin{array}{ll}\int_{\forall\underset{-}{\theta}} f\,(\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta})\,.\,f(\underset{-}{\theta})\;d\,\underset{-}{\theta} & if\,(\theta)\;continuous\\ \sum_{\forall\underset{-}{\theta}} f\,(\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta})\,.\,f(\underset{-}{\theta}) & if\,(\theta)\;Discrete\end{array}\right\}.....\quad (35)$$

يتضح مما سبق ، أن الأنموذج البيزي يتألف من ثلاثة عناصر أساسية . أولها ، يتمثل بالتوزيع المسبق للمعالم $f\,(\underset{-}{\theta})$ ، وهو دالة احتمالية ويسبق ملاحظة بيانات العينة المشاهدة للمتغير العشوائي $(\underset{-}{t})$. والثاني ، يعبَّر عنه بدالة الإمكان الأعظم للأنموذج $f\,(\underset{-}{t}\,|\,\underset{-}{\theta})$ ، أو دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات المشاهدة $(\underset{-}{t})$ عندما قيم المعلمات هي $(\underset{-}{\theta})$ ، والتي تعكس العلاقة بين البيانات والمعلمات . والثالث ، يمثل التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) $h(\underset{-}{\theta}\,|\,\underset{-}{t})$

للمعلمة $(\underline{\theta})$ وهو دالة شرطية لمجال $(\underline{\theta})$ بوجود قيم العينة ، والذي يستند عليه كل الاستدلال البيزي حول $(\underline{\theta}|\underline{t})$ ، والتوزيع اللاحق يمثل تحديث التوزيع المسبق للمعلمة $(\underline{\theta})$ بعد اخذ بيانات العينة الحالية بنظر الاعتبار .

بناءً على ذلك ، فان هدف الاهتمام يمكن أن يبسط كما يأتي :-

$$h(\underline{\theta}|\underline{t}) \propto f(\underline{t}|\underline{\theta}) \,.\, f(\underline{\theta}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

حيث أن $(\propto)$ تشير إلى أن الكمية تناسبية .

<u>۲.۲.۱.۱ مقدِّر بيز ودوال الخسارة المستخدمة في أسلوب التقدير البيزي</u>

<u>(The Bayes Estimator And The loss Functions Used In Bayesian Estimation Approach)</u>

إن هذا المبحث سيتطرق إلى ثلاثة أنواع من دوال الخسارة ، اثنتين منها مقترحة ، بغية إيجاد المقدِّر البيزي للمعلمة (θ) ، هي كما مبينة أدناه :-

<u>۲.۲.۱.۱.۱ مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية المعدلة</u>

<u>(The Bayes Estimator And The Modified Squared Error Loss Function)</u>

إن الصيغة الرياضية لدالة الخسارة التربيعية المعدلة ، تتمثل كما يأتي :-

$$L\left(\hat{\theta}, \theta\right) = \theta^{r}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^{2} \quad ; \quad r \neq 0 \,,\; r \in Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

إذ أن (Z) هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

وبالرجوع إلى دالة توزيع كاما ذات المعلمتين ، والمبينة في الصيغة الاتية:-

$$f(t\,;\,p\,,\theta) = \frac{1}{\Gamma(p)\,\theta^{p}}\, t^{\,p-1} \,.\, \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

لتكن $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ عينة عشوائية بحجم (n) ، تتبع توزيع كاما ذي المعلمتين ، فان دالة الإمكان الأعظم للمشاهدات ، تتمثل كما في الصيغة الاتية:-

$$L(t_1, t_{2,} t_3, \ldots, t_n; p, \theta) = \frac{1}{[\Gamma(p)]^{n}\,[\theta^{np}]} \,.\, \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta}\right) \prod_{i=1}^{n} t_i^{\,p-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

وبهدف إيجاد التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) للمعلمة (θ) ، فانه يتطلب الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية الأولية (Prior (p.d.f)) لها . ونظراً لأنه في حالة عدم توفر معلومات مسبقة ومتاحة عن المعلمة المطلوب تقديرها ، عندئذٍ ، يفضل إتباع الأسلوب الذي اقترحه الباحث (Jeffrey) لاختيار الدالة المسبقة للمعلمة المجهولة .

وبناءً عليه فان الدالة الاحتمالية الأولية غير المعلوماتية للمعلمة العشوائية (θ) سيتم افتراضها وفق الصيغة الاتية :-

$$\left.\begin{aligned} & g(\theta)\,\alpha\,\frac{1}{\theta^{c}} \quad ; \quad \theta>0 \quad , \quad c\in R^{+} \\ & g(\theta)=\frac{k}{\theta^{c}} \quad ; \quad Where \quad k:-a\ constant \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

وبناءً عليه ، فان التوزيع الشرطي لـ $(\underline{\theta})$ يكون بالشكل الاتي :-

$$h(\theta|t)=\frac{\frac{1}{\theta^{np+c}}.\,e^{\frac{-\sum t_i}{\theta}}}{\int\frac{1}{\theta^{np+c}}\,.\,e^{\frac{-\sum t_i}{\theta}}\,d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad Y=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{\sum t_i}{Y_i} \quad \Rightarrow \quad d\theta=\frac{-\sum t_i}{Y_i^2}\,dY$$

نحصل على المعادلة الاتية :-

$$h(\theta|t) = \frac{Y^{np+c}.e^{-Y}}{-\sum t.\Gamma(np+c-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

بناءً عليه ، فان دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمة (θ) وباعتماد التحويل الوارد أعلاه تتمثل بالصيغة التالية :-

$$\therefore h(\theta|t) = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta}\right)^{c+np}.\,e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{\theta}}}{\sum t\,.\,\Gamma(c+np-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

وبافتراض توفر دالة خسارة (Loss Function) متاحة من نوع دالة الخسارة التربيعية المعدلة ، فان دالة المخاطرة (Risk Function) هي كما مبينة أدناه :-

$$R = RISK = E\left[\theta^{r}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^{2}\right]=E\left[\theta^{r}\left(\hat{\theta}^{2}-2\hat{\theta}\theta+\theta^{2}\right)\right]=$$

$$\therefore \quad R=\hat{\theta}^{2}E\left(\theta^{r}\right)-2\hat{\theta}E\left(\theta^{r+1}\right)+E\left(\theta^{r+2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمعادلة أعلاه بالنسبة للمتغير $(\hat{\theta})$ ومساواة الناتج بالصفر ، نحصل على مايأتي :-

$$\frac{\partial R}{\partial\hat{\theta}} = \hat{\theta}E\left(\theta^{r}\right)-E\left(\theta^{r+1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

$$Let \quad \frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad ; \quad \text{Then :-} \quad \hat{\theta} E\left(\theta^{r}\right) - E\left(\theta^{r+1}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \hat{\theta} = \frac{E\left(\theta^{r+1}\right)}{E\left(\theta^{r}\right)} = \frac{\int_0^\infty \theta^{r+1} . \left(\frac{\sum t}{\theta}\right)^{c+np} . e^{\frac{-\sum t}{\theta}} \Big/ -\sum t \,.\, \Gamma\left(c+np-1\right) \, d\theta}{\int_0^\infty \theta^{r} . \left(\frac{\sum t}{\theta}\right)^{c+np} . e^{\frac{-\sum t}{\theta}} \Big/ -\sum t \,.\, \Gamma\left(c+np-1\right) \, d\theta}$$

وبإجراء العمليات الرياضية لتبسيط المقدار أعلاه ، نحصل على :-

$$\hat{\theta} = \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta}\right)^{c+np-r-1} \left(\sum t\right)^{c+np} . e^{\frac{-\sum t}{\theta}} d\theta}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta}\right)^{c+np-r} . \left(\sum t\right)^{c+np} . e^{\frac{-\sum t}{\theta}} d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad W = \frac{\sum t}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\sum t}{W} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{-\sum t}{W^2} . \quad dW$$

نحصل على ما يأتي :-

$$\hat{\theta} = \frac{(\sum t) . \Gamma\left(c+np-r-2\right)}{\Gamma\left(c+np-r-1\right)} = \frac{(\sum t) . \left(c+np-r-3\right)!}{\left(c+np-r-2\right)!}$$

وعليه فان مقدِّر بيز في حالة توفر دالة خسارة تربيعية معدلة [3] ، يتمثل وفق الصيغة :-

$$\therefore \quad \hat{\theta}_{M.quad.} = \frac{(\sum t)}{\left(c+np-r-2\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

٢.٢.١.١.٢ <u>مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية (المقترحة)</u>

<u>(The Bayes Estimator And The Proposed Squared Error Loss Function)</u>

بافتراض توفر دالة خسارة (Loss Function) متاحة من نوع دالة الخسارة التربيعية ، وفق الصيغة الرياضية الاتية :-

$$L\left(\hat{\theta}, \theta\right) = \theta^{\ell} \left(\hat{\theta}^{m} - \theta^{m}\right)^2 \quad ; \quad \ell \neq 0 \quad , \quad m \neq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

---

[3] ($\hat{\theta}_{quad.}$: إن الحروف الصغيرة التي تقع إلى جانب المقدِّر تشير إلى نوع دالة الخسارة المستخدمة في التقدير ، حيث انه حينما يتم الإشارة للمقدِّر عند استخدام دالة الخسارة التربيعية المعدلة (Modified Squared Error Loss Function) تم اختيار الحروف (.M.quad) للدلالة على ذلك . وان هذا سوف يسري على كافة المقدِّرات الأخرى التي سيتم تقديرها وفق دوال الخسارة المختلفة التي سيتم اعتمادها في هذا البحث .

فان دالة المخاطرة (Risk Function) هي كما مبينة أدناه :-

$$R = Risk = E(Loss\,Function) = E\left[\theta^{\ell}\left(\hat{\theta}^{m} - \theta^{m}\right)^{2}\right] \quad .... \quad (49)$$

$$\therefore \quad R = \hat{\theta}^{2m}\, E\left(\theta^{\ell}\right) - 2\hat{\theta}^{m}\, E\left(\theta^{\ell+m}\right) + E\left(\theta^{\ell+2m}\right) \quad .... \quad (50)$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمعادلة أعلاه بالنسبة للمتغير $(\hat{\theta})$ ومساواة الناتج بالصفر ، نحصل على مايأتي :-

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 2m\,.\,E\left(\theta^{\ell}\right).\,\hat{\theta}^{2m-1} - 2m.E\left(\theta^{\ell+m}\right).\,\hat{\theta}^{m-1} + 0 \quad .... \quad (51)$$

$$Let \quad \frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad ; \quad then \quad :-$$

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 2m\,.\,E\left(\theta^{\ell}\right).\,\hat{\theta}^{2m-1} - 2m.E\left(\theta^{\ell+m}\right).\,\hat{\theta}^{m-1} + 0 = 0 \quad .... \quad (52)$$

بقسمة الطرفين على (2m) ينتج :-

$$\therefore \quad \hat{\theta}^{m} = \frac{E\left(\theta^{\ell+m}\right)}{E\left(\theta^{\ell}\right)} \quad .... \quad (53)$$

وعليه فان التوقع اللاحق (Posterior Mean) للمعلمة (θ) هو كما مبين في أدناه :-

$$\hat{\theta}^{m} = \frac{\left(\sum t\right)^{c+np} \int_{0}^{\infty} \theta^{\ell+m-c-np} .\, e^{\frac{-\sum t}{\theta}}\, d\theta}{\left(\sum t\right)^{c+np} \int_{0}^{\infty} \theta^{\ell-c-np} .\, e^{\frac{-\sum t}{\theta}}\, d\theta}$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad V = \frac{\sum t}{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\sum t}{V} \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{-\sum t}{V^{2}}\, dV$$

نحصل على المعادلة الاتية :-

$$\hat{\theta}^{m} = \frac{\int_{0}^{\infty} \left(\sum t\right)^{\ell+m-c-np+1} .\, V^{np+c-m-\ell-2} .\, e^{-V}\, dV}{\int_{0}^{\infty} \left(\sum t\right)^{\ell-c-np+1} .\, V^{np+c-\ell-2} .\, e^{-V}\, dV} \quad .... \quad (54)$$

$$\therefore \quad \hat{\theta}^{m} = \frac{\left(\sum t\right)^{m} \Gamma\left(c+np-\ell-m-1\right)}{\Gamma\left(c+np-\ell-1\right)} \quad .... \quad (55)$$

وبرفع الطرفين للقوة $\left(\frac{1}{m}\right)$ نحصل على :-

$$\therefore \quad \hat{\theta}_{P.quad} = \left(\sum t\right) . \left[\frac{\Gamma\left(c+np-\ell-m-1\right)}{\Gamma\left(c+np-\ell-1\right)} \right]^{\frac{1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

٢.٢.١.١.٣ مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة)

(The Bayes Estimator And The Prior Distribution Is According Inverted Gamma Distribution (Proposed))

إن الركائز الأساسية التي يقوم عليها التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) للمعلمة العشوائية (θ) ، تتمثل بالوقوف على كلاً مما يأتي :-

- ❖ دالة توزيع كاما ذات المعلمتين ، والمبينة صيغتها في المعادلة رقم (19) .
- ❖ إن دالة الإمكان الأعظم للعينة العشوائية ذات الحجم (n) ، والتي تتبع توزيع كاما ذي المعلمتين ، تتمثل وفق المعادلة رقم (39) .
- ❖ بغية اختيار الدالة المسبقة للمعلمة المجهولة ، فان دالة الكثافة الاحتمالية الأولية (Prior (p.d.f)) للمعلمة العشوائية (θ) ، سيتم الاعتماد على الافتراض المتمثل بأنها تتبع دالة توزيع كاما المعكوس ، بعبارة أخرى ، ($g(\theta) \approx$ Inverted Gamma Distribution) .

أي إن ذلك يتم وفق الصيغة الرياضية الاتية :-

$$g(\theta) = \frac{\delta^{r}}{\Gamma(r).\theta^{r+1}} \; . \; e^{-\left(\frac{\delta}{\theta}\right)} \qquad ; \quad \delta > 0 \;\; , \;\; r > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

- ❖ وبهدف إيجاد التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) للمعلمة العشوائية (θ) ، فانه بناءً على ما سبق ذكره في أعلاه ، فان التوزيع الشرطي لـ ($\underline{\theta}$) يكون بالشكل الاتي :-

$$h(\theta|t) = \frac{\dfrac{\delta^{r} . e^{-\left(\frac{\delta}{\theta}\right)}}{\Gamma(r).\theta^{r+1}} \cdot \dfrac{1}{(\Gamma(p))^{n} . \theta^{np}} \cdot \prod_{i=1}^{n} t_i^{\,p-1} . e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)}}{\int_0^{\infty} \dfrac{\delta^{r} . e^{-\left(\frac{\delta}{\theta}\right)}}{\Gamma(r).\theta^{r+1}} \cdot \dfrac{1}{(\Gamma(p))^{n} . \theta^{np}} \cdot \prod_{i=1}^{n} t_i^{\,p-1} . e^{-\left(\frac{\sum t_i}{\theta}\right)} \, d\theta} \quad \ldots.. \quad (58)$$

$$\therefore \quad h(\theta|t) = \frac{\dfrac{1}{\theta^{r+1+np}} . e^{-\left[\frac{\delta+\sum t_i}{\theta}\right]}}{\int_0^{\infty} \dfrac{1}{\theta^{r+1+np}} . e^{-\left[\frac{\delta+\sum t_i}{\theta}\right]} \, d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad y_i = \frac{\delta+\sum t_i}{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\delta+\sum t_i}{y_i} \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{-\left(\delta+\sum t_i\right)}{y_i^2} \; dy_i$$

نحصل على المعادلة الاتية :-

$$\therefore \quad h(\theta|t) = \frac{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\delta+\sum t_i}{y_i}\right)^{r+1+np}} \; . \; e^{-y_i}}{\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{\delta+\sum t_i}{y_i}\right)^{r+1+np}} \; . \; e^{-y_i} \; . \; \dfrac{\left(\delta+\sum t_i\right)}{y_i^2} \; dy_i} =$$

$$\therefore \quad h(\theta|t) = \frac{y_i^{r+1+np} \; . \; e^{-y}}{\left(\delta+\sum t_i\right) . \Gamma(r+np)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

❖ إن الركيزة الأساسية الأخرى في هذا الأسلوب للتقدير تتمثل في تحديد دالة الخسارة والتي لها اثر في تحديد مقدِّر بيز من خلال الاعتماد على دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) ، والمبينة صيغتها في المعادلة الاتية :-

$$L\left(\hat{\theta}, \theta\right) = \left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

أما بصدد دالة المخاطرة (Risk Function) فهي كما مبينة أدناه :-

$$R = Risk = E\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = E\left[\hat{\theta}^2 - 2\theta\,\hat{\theta} + \theta^2\right] = \hat{\theta}^2 - 2\,\hat{\theta} . E(\theta) + E\left(\theta^2\right)$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمعادلة أعلاه بالنسبة للمتغير $(\hat{\theta})$ ومساواة الناتج بالصفر ، نحصل على ما يلي :-

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 2\hat{\theta} - 2E(\theta) + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = \hat{\theta} - E(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore \; \hat{\theta} = E(\theta)$$

وبناءً عليه ، فان التوقع اللاحق (Posterior Mean) للمعلمة العشوائية (θ) هو كما مبين في أدناه :-

$$\hat{\theta} = E(\theta) = \int_0^{\infty} \theta \; . \; \frac{y_i^{r+1+np} \; . \; e^{-y_i}}{\left(\delta+\sum t_i\right) . \Gamma(r+np)} \; d\theta =$$

$$\hat{\theta} = \frac{\left(\delta+\sum t_i\right)}{\left(\delta+\sum t_i\right) . \Gamma(r+np)} \; . \int_0^{\infty} \left(\frac{\delta+\sum t_i}{\theta}\right)^{r+np} . \; e^{-\left(\frac{\delta+\sum t_i}{\theta}\right)} \; d\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad y_i = \frac{\delta+\sum t_i}{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\delta+\sum t_i}{y_i} \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{-\left(\delta+\sum t_i\right)}{y_i^2} \; dy_i$$

نحصل على المعادلة التالية :-

$$\hat{\theta} = \frac{\left(\delta+\sum t_i\right)}{\left(\delta+\sum t_i\right) . \Gamma(r+np)} \; . \int_0^{\infty} y_i^{r+np} \; . \; e^{-y_i} \; . \; \frac{\left(\delta+\sum t_i\right)}{y_i^2} \; dy_i =$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_{INV.G} = \left(\delta + \sum t_i\right) . \dfrac{\Gamma\left(r+np-1\right)}{\Gamma\left(r+np\right)} \\ \hat{\theta}_{INV.G} = \left(\delta + \sum t_i\right) . \dfrac{\left(r+np-2\right)!}{\left(r+np-1\right)!} \end{array} \right\} \qquad \text{..................................} \qquad (63)$$

٢.٢.٢ التقدير باستخدام طريقة (Minimax)[٩][١٠][٢] (Minimax Estimation)

إن طريقة (Minimax) تعد الأسلوب الثاني الذي اعتمده هذا البحث إلى جانب أسلوب التقدير البيزي ، واللذين يَتَبوَّءان مركز الصدارة في الطرائق البيزية (Bayesian Methods) . وإنها تهدف إلى تقدير المعلمات المتضمنة في التوزيع قيد البحث في مجال الطرائق البيزية .

ولقد اقتُرِحَت طريقة (Minimax) من قبل الباحث (Abraham Wald) في عام (1945) بالاعتماد على فكرة نظرية الألعاب (Game Theory) . حيث أنها فتحت آفاقاً جديدة في التقدير الإحصائي ، إضافة إلى أنها وَسَّعَت مجال طريقة تقدير النقطة (Point Estimations) . ولقد قَدَّم الباحث (Uon Newmann) للعالم في عام (1944) طريقة (Minimax) في نظرية الألعاب .

وفي عام (2004) قام الباحث (Podder et al.) باستخدام طريقة الـ (Minimax) في دراسة مُقَدِّر المعلمة لتوزيع باريتو (Pareto Distribution) في ظل دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) إضافة إلى دالة الخسارة الأسية الخطية المعدلة (Modified Linear Exponential Loss Function (MLINEX) .

وفي هذا المبحث سيتم التوصل إلى مقدِّر المعلمة (θ) لدالة توزيع كاما ذات المعلمتين (Two Parameter Gamma Distribution) ، والمبينة صيغتها في المعادلة رقم (19)، وذلك من خلال تطبيق النظرية التي تعود إلى الباحث (Hodge and Lehmann) في عام (1950) .

وان نظرية (Lehmann's Theorem) ترتكز معطياتها على مايأتي :-

افترض أن :-

$\tau = \{ F_\theta \; ; \; \theta \in \Theta \}$:- تمثل عائلة تتضمن دوال التوزيعات (a Family Of Distribution Functions) .

D :- تمثل مجموعة المُقَدِّرات (a Class of Estimators) للمعلمة (θ) .

$\{ d^* \in D \}$:- هو مُقَدِّر بيز (Bayes Estimator) والمقابل للتوزيع الأولي (Prior Distribution) $\zeta^*(\theta)$ لمجال المعلمات (Parameter Space) (Θ) .

$R\left(d^*, \theta\right)$:- تمثل دالة المخاطرة (The Risk Function) ، وهي كمية ثابتة في مجال المعلمات (Θ) (Constant on θ) .

عندئذٍ فان :-

$\left(d^*\right)$:- هو مُقَدِّر المعلمة (θ) باستخدام طريقة الـ (Minimax) .

وفي الفقرة التالية ، سيتم صب منهجية تطبيق هذه الطريقة في سطور ، حيث أنها تقوم على محورين :- أولهما ، يتمثل باعتماد نظرية (Lehmann's Theorem) والتي سبق الإشارة إليها في أعلاه ، إضافة إلى افتراض دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) من النوع (D – Grood) ، والمبينة صيغتها كما يلي :-

$$L\left(\hat{\theta}, \theta\right) = \left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\theta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

وتتسم هذه الدالة بأنها غير سالبة (Non Negative) ، ومتماثلة (Symmetric) ، إضافة إلى أنها دالة خسارة مستمرة (Continuous Loss Function) لـ (θ & $\hat{\theta}$) .

والمحور الآخر ، يتمثل في تثبيت هذه النظرية من خلال تطبيق الخطوتين الاتيتين :-

- إيجاد مُقَدِّر بيز (Bayes Estimator) ($\hat{\theta}$) للمعلمة (θ) .
- إثبات أن دالة المخاطرة (Risk Function) لـ ($\hat{\theta}$) عبارة عن كمية ثابتة (Constant) .

وباعتماد دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) أعلاه ، والتي لها اثر في تحديد مُقَدِّر بيز.

أما بصدد دالة المخاطرة (The Risk Function) فهي كما مبينة أدناه :-

$$R = \text{RISK} = \text{E}\left[\text{Loss Function}\right] = E\,L\left(\hat{\theta}, \theta\right) = E\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\theta}\right)^2$$

$$\therefore \quad R = \hat{\theta}^2 . E\left(\frac{1}{\theta^2}\right) - 2\,\hat{\theta} . E\left(\frac{1}{\theta}\right) + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمعادلة أعلاه بالنسبة للمتغير ($\hat{\theta}$) ومساواة الناتج بالصفر ، نحصل على ما يلي :-

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 2\,\hat{\theta} \,.\, E\left(\frac{1}{\theta^2}\right) - 2 \,.\, E\left(\frac{1}{\theta}\right) + 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

$$Let \quad \frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad ; \quad Then :-$$

وبقسمة الطرفين على (2) ، نحصل على :-

$$\therefore \quad \hat{\theta} = \frac{E\left(\frac{1}{\theta}\right)}{E\left(\frac{1}{\theta^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

وباعتماد دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمة العشوائية (θ) ، أي بعبارة أخرى ($h\left(\theta | t\right)$) ، والمبينة صيغتها في المعادلة رقم(43) ، نحصل على المعادلة الاتية :-

$$E\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{-1}{\left(\sum t\right)^2 . \Gamma\left(c+np-1\right)} . \int_0^\infty \left(\frac{\sum t}{\theta}\right)^{c+np+1} . e^{-\left(\frac{\sum t}{\theta}\right)} \quad d\theta \quad ..... \quad (68)$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad Y = \frac{\sum t}{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\sum t}{Y} \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{-\sum t}{Y^2} \, dY$$

وبالتعويض نحصل على المعادلة الاتية :-

$$E\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{-1}{\left(\sum t\right)^2 . \Gamma\left(c+np-1\right)} . \int_0^\infty Y^{c+np+1} . e^{-Y} . \frac{-\sum t}{Y^2} \quad dY \quad =$$

$$\therefore \quad E\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\left(c+np-1\right)}{\left(\sum t\right)} \quad .... \quad (69)$$

$$E\left(\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{-1}{\left(\sum t\right)^3 . \Gamma\left(c+np-1\right)} . \int_0^\infty \left(\frac{\sum t}{\theta}\right)^{c+np+2} . e^{-\left(\frac{\sum t}{\theta}\right)} \, d\theta \quad ..... \quad (70)$$

وباعتماد التحويل الآتي في المعادلة أعلاه :-

$$Let \quad Y = \frac{\sum t}{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\sum t}{Y} \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{-\sum t}{Y^2} \, dY$$

وبالتعويض نحصل على ما يأتي :-

$$E\left(\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{-1}{\left(\sum t\right)^3 \; . \; \Gamma\left(c+np-1\right)} . \int_0^\infty Y^{c+np+2} \; . \; e^{-Y} \; . \; \frac{-\left(\sum t\right)}{Y^2} \; dY \; =$$

$$\therefore \quad E\left(\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{\left(c+np\right)\left(c+np-1\right)}{\left(\sum t\right)^2} \quad .... \quad (71)$$

وبتعويض كلاً من المعادلتين ذات الرقمين (68) و (71) في المعادلة رقم (67) ، يتم الحصول على المعادلة الاتية :-

$$\therefore \quad \hat{\theta} = \frac{E\left(\frac{1}{\theta}\right)}{E\left(\frac{1}{\theta^2}\right)} = \frac{\frac{\left(c+np-1\right)}{\left(\sum t\right)}}{\frac{\left(c+np\right)\left(c+np-1\right)}{\left(\sum t\right)^2}} = \frac{\left(\sum t\right)}{\left(c+np\right)}$$

$$\therefore \quad \hat{\theta}_{MIMX} = \frac{\left(\sum t\right)}{\left(c+np\right)} \quad .... \quad (72)$$

$\therefore$ تم التوصل من المعادلة أعلاه إلى أن ($\hat{\theta}_{MIMX}$) هو المُقَدِّر للمعلمة (θ) في دالة توزيع كاما ذات المعلمتين بموجب طريقة (Minimax Estimation) ، وذلك في ظل دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) من النوع (D – Grood) .

أما بصدد المرحلة المُقبلة والأخيرة ، فإنها تتمثل في إثبات أن قيمة دالة المخاطرة (The Risk Function) للمُقدِّر ($\hat{\theta}_{MIMX}$) هي عبارة عن كمية ثابتة (Constant) ، أي إنها مستقلة (Independent) عن (θ) . وبعبارة أخرى ، تكمن في الإجابة على السؤال الاتي :- هل أن المُقَدِّر ($\hat{\theta}_{MIMX}$) هو (Minimax) ؟ أم لا .

$$R = Risk = E\left(\frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2} \cdot E\left(\hat{\theta}^2 - 2\theta \cdot \hat{\theta} + \theta^2\right)$$

بتعويض قيمة ($\hat{\theta}$) بما يساويها ، نحصل على ما يأتي :

$$R = \frac{1}{\theta^2 \cdot (c+np)^2} \cdot E\left[\left(\sum t\right)^2\right] - \frac{2}{\theta\,(c+np)} \cdot E\left(\sum t\right) + 1 \quad ...... \quad (73)$$

إن الخطوة اللاحقة تتمثل في إيجاد قيمة كلاً مما يأتي :-

- $E\left(\sum t\right)$
- $E\left(\sum t\right)^2$

$Since \quad t \approx \Gamma(p, \theta) \quad or \quad t \approx \ Gamma \ Distribution \ (p, \theta)$

$Hence \ \sum t \approx \Gamma(np, \theta)$

$E\left(\sum t\right) = np\,\theta$

$E\left(\sum t\right)^2 = np\theta^2 + n^2 p^2 \theta^2$

وبتعويض قيمة كلاً من $\{E\left(\sum t\right) \& E\left(\sum t\right)^2\}$ في المعادلة رقم (73) أعلاه ، يتم الحصول على ما يلي :-

$$R = \frac{1}{\theta^2 . (c+np)^2} \cdot \left[np\theta^2 + n^2p^2\theta^2\right] - \frac{2}{\theta\,(c+np)} \cdot np\theta + 1 =$$

$$R = \frac{\left(np + n^2p^2\right)}{(c+np)^2} - \frac{2np}{(c+np)} + 1 \quad .... \quad (74)$$

$\therefore \quad R = Risk \quad Is \ Constant. \quad (i.e)\ R \quad Is \ Independent \ Of \ (\theta).$

∴ استناداً إلى نظرية (Lehmann's Theorem) ، تم التوصل إلى أن المُقَدِّر ($\hat{\theta}_{MIMX}$) بموجب طريقة (Minimax Estimation) والمبينة صيغته في المعادلة رقم (72) ، هو (Minimax) ، وذلك لأن قيمة دالة المخاطرة (The Risk Function) للمُقَدِّر ($\hat{\theta}_{MIMX}$) هي عبارة عن كمية ثابتة (Constant) ، حيث أنها مستقلة (Independent) عن (θ) .

٣. <u>الجانب التجريبي (The Empirical View)</u>

لقد تعددت أساليب المحاكاة لاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استخدام الحاسبة الالكترونية ، مما وَفَّرَ للباحثين الكثير من الجهد والمال والوقت وحقق لهم حلولاً تحليلية لأن أسلوب المحاكاة يؤمن للباحث قاعدة تجريبية تكون دليلاً مع القاعدة النظرية لاختيار الأسلوب الملائم أو الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر قيد البحث من خلال مطابقة خصائصها مع الأنواع التي طُبِّقت عليها المحاكاة .

ويسعى المبحث الحالي إلى اعتماد منهج المحاكاة باستخدام طريقة مونت – كارلو (Monte–Carlo Method) في تقدير دالة توزيع كاما ذات المعلمتين (Two Parameter Gamma Distribution) ، عن طريق إجراء المقارنة بين عدة طرائق مبحوثة ، وبيان الأفضل منها وفق

الأسس النظرية ذات العلاقة . فضلاً عن عرض مراحل بناء تجربة المحاكاة ، ووصف لتجربة المحاكاة الخاصة بالبحث من حيث أحجام العينات المُوَلَّدة وقيم المعلمات ، وكذلك نماذج الدوال الافتراضية المستخدمة ، وأخيراً عرض نتائج تجربة المحاكاة التي سيتم الحصول عليها .

٣.١ مراحل بناء تجربة المحاكاة

(Stages Of Building Simulation Experiment)

تتضمن مراحل بناء تجربة المحاكاة أربعة مراحل ، هي على النحو الآتي :-

٣.١.١ المرحلة الأولى – تحديد القيم الافتراضية

(Initial Values Determination)

تعد هذه المرحلة من أهم المراحل ، حيث تعتمد عليها بقية المراحل اللاحقة ، إذ تتضمن تعيين القيم الافتراضية وكما هو مدوَّن في الخطوات الاتية :-

١) تحديد أحجام العينات المفترضة (n) (Samples Sizes Determination)

إن حجم العينة له تأثير في دقة وكفاءة النتائج المستحصلة من طرائق التقدير ، فلقد تم تعيين خمسة أحجام مختلفة للعينات هي (n=10,25,35,50,75) ، إذ تمثل (n=10,25,35) العينات الصغيرة ، و(n=50) العينة المتوسطة ، و(n=75) العينة الكبيرة .

٢) تحديد القيم الافتراضية للمعلمات والثوابت

(The Constants & Parameters Initial Values Determination)

تم تعيين قيم افتراضية لمعلمتي توزيع كاما ، إذ أُخِذَت لكلاً من معلمة القياس (Scale Parameter) (θ) ، ومعلمة الشكل (Shape parameter) (P) . وان الأساس الذي تم اعتماده في اختيار القيم الافتراضية لهما يتمثل بأن هذه المعلمات موجبة ، أي ان ($P,\theta > 0$) . وعند اختيار قيمة افتراضية للمعلمة (θ) فان (P) سوف تكون قريبة منها وليست بعيدة ، وذلك للحفاظ على حصانة المُقَدِّر البيزي . ويمكن اختيار قيم أخرى ولا تؤثر على جانب النتائج في عملية المحاكاة . إضافة إلى ذلك ، فلقد تم تعيين قيم افتراضية للثوابت المتعلقة بنماذج طرائق التقدير قيد البحث والواردة في الفصل الثاني ضمن الجانب النظري للبحث ، وسيتم بيانها كما في الجدول التالي :-

الجدول رقم (١) :- القيم الافتراضية للمعلمات والثوابت

قيم معلمتي توزيع كاما		قيم الثوابت المتعلقة بنماذج طرائق التقدير				
θ	P	C	r	ℓ	m	δ
0.5	2	1	1	-1	1	2
0.9	3	2	3	+1	2	4
1.0	---	---	---	---	---	---
3.0	---	---	---	---	---	---

إن القيم الافتراضية لمعلمتي توزيع كاما والواردة في الجدول أعلاه ، أبرزت محصلة قدرها ثمانية نماذج مفترضة . وكما موضح في الجدول الاتي :-

الجدول رقم (٢) :- القيم الافتراضية لمعلمتي توزيع كاما ذي المعلمتين والنماذج المفترضة

Model	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
θ	٠.٥		٠.٩		١.٥		٣.٠	
P	٣	٢	٣	٢	٣	٢	٣	٢

ويعزى انتقاء قيماً وأحجاماً متباينة لكلاً من معلمتي توزيع كاما وتلك الثوابت المتعلقة بنماذج طرائق التقدير قيد البحث ، إضافة إلى أحجام العينات (كبيرة ، متوسطة ، صغيرة) في التجارب المختلفة ، وذلك لبيان مدى تأثير التغير في هذه القيم على المقدرات لطرائق التقدير المعتمدة ونمط سلوكها .

٣) تحديد تكرار أحجام العينات (R) (Samples Sizes Replication Determination)

بلغ عدد تكرار التجارب (R = 1000) مرّة لكل تجربة ، وذلك لزيادة الحصول على دقة وتجانس عالي .

٣.١.٢ المرحلة الثانية – توليد البيانات (Data Generation)

في هذه المرحلة تم توليد البيانات العشوائية وبما يتلاءم والتوزيع الإحصائي المفترض بغية المقارنة والمفاضلة ما بين مُقَدِّرات طرائق التقدير المختلفة قيد البحث .

إن صيغة توليد البيانات العشوائية التي تتبع توزيع كاما ذي المعلمتين ، تتمثل في استخدام طريقة التحويل المعكوس (Inverse Transform Method) على المشاهدات العشوائية ذات التوزيع الأسي الناتجة من مشاهدات عشوائية مُوَلَّدَة من مجتمع واحد من التوزيع المنتظم (0,1) ، لغرض الحصول على مشاهدات ذات توزيع كاما ذي المعلمتين التي تمثل أوقات الفشل المفردة ، ومن ثم تجمع أوقات الفشل المفردة مع بعضها للحصول على أوقات الاشتغال التجميعية ، وكما يأتي :-

١. توليد أرقام عشوائية ذات توزيع كاما ذي المعلمتين التي تمثل أوقات الفشل المفردة من خلال الصيغة الآتية ، أي أن :-

$$t_i = -\frac{1}{\theta} \, . \, Ln\left(U_i\right) \quad ; \qquad i = 1,2,3, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

إذ أن (U_i) يمثل متغير عشوائي منتظم مستمر (Continuous Uniform Variate) مُعَرَّف على الفترة (0,1) .

١. يتم جمع قيم (t_i) التي تم الحصول عليها من الخطوة (١) والتي تمثل أوقات الفشل المفردة للحصول على أوقات الاشتغال التجميعية ، وذلك باستخدام الصيغة الآتية :-

$$T_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \quad \text{..........} \quad (76)$$

حيث أن :-

$$i = 1, 2, 3, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ n$$

٣.١.٢ المرحلة الثالثة – إيجاد التقديرات (Estimations Finding)

في هذه المرحلة تجري عملية تقدير معلمة القياس لدالة توزيع كاما ذات المعلمتين (Two Parameter Gamma Distribution) باستخدام طرائق التقدير التي تناولتها الباحثة والواردة في الجانب النظري للبحث ، وعلى وفق صيغ طرائق التقدير المبينة في المعادلات الآتية :- (١٦) (٢٥) (٤٧) (٥٦) (٦٣) (٧٢) .

٣.١.٤ المرحلة الرابعة – المقارنة بين طرائق التقدير
(The Comparison Between The Estimation Methods)

يتم في هذه المرحلة المقارنة ما بين طرائق التقدير المختلفة ، وذلك باعتماد معيارين من معايير المقارنة المهمة :-

❖ متوسط مربعات الخطأ (MSE) (Mean Square Error)

يعرف بأنه عبارة عن متوسط مربع الفرق ما بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية ، وان المقدِّر الجيد هو الذي يمتلك اقل قيمة لـ (MSE) . وصيغته كما يأتي :-

$$MSE = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^{R} \left(\hat{\theta}_i - \theta \right)^2 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \cdots, R \quad \text{..........} \quad (3-4)$$

❖ متوسط الخطأ النسبي المطلق (Mean Absolute Percentage Error) (MAPE)

وصيغته كما يأتي :-

$$MAPE = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^{R} \frac{\left| \hat{\theta}_i - \theta \right|}{\theta} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \cdots, R \quad \text{..........} \quad (3-5)$$

حيث أن :-

R :- تمثل عدد التكرارات (Replications) لكل تجربة .

$\hat{\theta}_i$:- مُقَدِّرْ (θ) حسب الأسلوب المستخدم في التقدير .

٣.٢ **تحليل نتائج تجارب المحاكاة**
(Results Analysis Of Simulation Experiment)

يتضمن هذا المبحث عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها ، وفق طرائق التقدير التي تم بيانها في الجانب النظري من هذا البحث ، بغية الوقوف على أفضل الطرائق لتقدير معلمة القياس (θ) لدالة

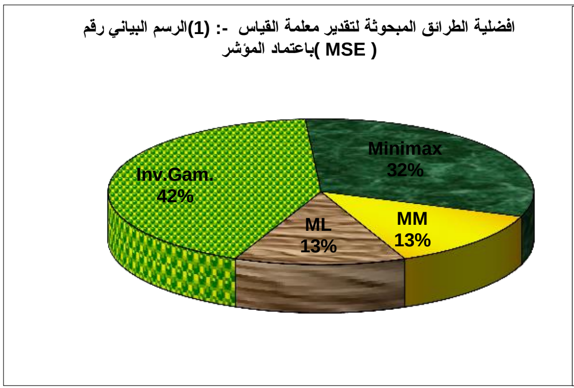
توزيع كاما ذي المعلمتين ، من خلال الاعتماد على قيم مقاييس الكفاءة الإحصائية المتمثلة بكلاً من متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) .

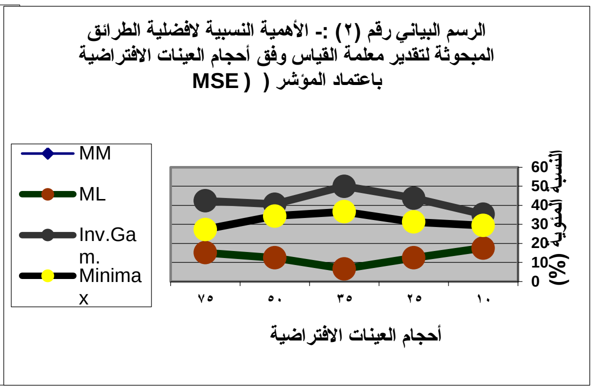
إذ تم عرض نتائج تجارب المحاكاة في الجداول رقم (٣ - ٩) التي توضح قيم المؤشرات الإحصائية للمعلمة (θ) . ولقد تبين من خلال تلك الجداول ما يأتي :-

أولاً :- تعكس البيانات الواردة في الجدول رقم (٣) اقتراب اغلب القيم التقديرية للمعلمة (θ) من القيم الافتراضية المحددة لها ، والنابعة عن استخدام طرائق التقدير المعتمدة كافة ، وذلك وفق النماذج وأحجام العينات المفترضة كافة . فضلاً على ذلك ، فإن مسار مؤشر حجم اقتراب اغلب القيم التقديرية من القيم الافتراضية للمعلمة (θ) رافقه اتجاهاً مغايراً لمؤشر حجم العينة الافتراضي . بعبارة أخرى ، ان قيم التحيز للمعلمة المقدرة (θ) تنخفض تدريجياً مع ارتفاع عدد المشاهدات (n) في اغلب الأحيان ، ولكافة طرائق التقدير .

ثـــانيـــاً :- إن الصورة الرقمية لقيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير المعلمة (θ) باعتماد الطرائق المبحوثة كافة ، والتي أظهرتها نتائج تجارب المحاكاة ، إضافة إلى عدد مرات الأفضلية لتلك الطرائق ، والأهمية النسبية لمدى مساهمة قيمة (MSE) لكل مُقَدِّر في الإجمالي عند جميع أحجام العينات المفترضة ، فان معطيات الجداول رقم (٤-٦) تعكس ذلك جلياً . ويتضح منها ما يأتي:-

١. إن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير المعلمة (θ) بطرائق التقدير المعتمدة وللنماذج كافة ، تتناقص تدريجياً مع زيادة أحجام العينات المفترضة (انظر الجدول رقم (٤)) .
٢. ان مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة) تبوأت مركز الصدارة لارتفاع كفاءتها في تقدير المعلمة (θ) لكافة النماذج وأحجام العينات المفترضة . نظراً لامتلاكها اقل القيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) ، حيث بلغ إجمالي تكرارات أفضليتها للحالات المعتمدة (٦٨) ، وأسهمت بنصيب نسبي مرتفع قدره (42.2%) (انظر الرسم البياني رقم (١)) .





أما على صعيد أحجام العينات الافتراضية بِرُمَّتِها ، فانه عند تتبع مسار مؤشر (MSE) من خلال تبيان الأهمية المناطة لأنواع تلك الأحجام المفترضة ، فان بيانات الجدول رقم (٦) تعكس بعض التباين في اتجاهات المساهمة النسبية حيث أنها تراوحت بين (35.3%) كحد أدنى عندما (n=10) و(50.0%) كحد أعلى عندما (n=35) والتي تمثل مركز الثقل لقيم (MSE) ومحتلا عندها المركز الأول ، فيما حضيت (n=25) بالمركز الثاني بنسبة (43.8%) ثم تأتي العينات الكبيرة والمتوسطة (n=75,50) بالمركزين الثالث والرابع بنصيب نسبي قدرهما (42.4% و 40.6%) على التوالي (انظر الرسم البياني رقم (٢)) .

٣. ان طريقة (Minimax) حضيت بالمرتبة الثانية من حيث الأفضلية عند إجمالي وأنواع أحجام العينات المبحوثة بغية تقدير المعلمة (θ) ، حيث بلغ حجم أفضليتها (٥١) تكرار لكافة الحالات المبحوثة وبنسبة (31.7%) من الإجمالي . وعلى امتداد أنواع أحجام العينات المبحوثة ككل فقد حققت نمطاً مغايراً لنظيره المتحقق في المركز الأول والمذكور أعلاه .

ولإعطاء صورة رقمية عن الأوزان النسبية لمدى مساهمة كل نوع من أحجام العينات في الإجمالي ، فان الجدول رقم (٦) يعكس تفاوت بسيط في اتجاهات المساهمة النسبية . ويتضح بأن العينات الصغيرة عندما (n=35) احتلت المرتبة الأولى وأسهمت بنسبة (36.7%) ، فيما حضيت العينات المتوسطة (n=50) بالمرتبة الثانية بنسبة (34.4%) ، ثم تليها العينات الصغيرة عندما (n=25,10)) بالمرتبتين الثالثة والرابعة بنصيب نسبي قدرهما (31.3% و 29.4%) على الترتيب ، ثم تأتي العينات الكبيرة (n=75) بالمركز الخامس بنسبة (27.3%) .

٤. يعكس الرسم البياني رقم (١) حقيقة ان الطرائق الكلاسيكية (التقليدية) كطريقتي العزوم والإمكان الأعظم احتلت المرتبة الثالثة على مستوى كلاً من إجمالي وأنواع أحجام العينات الافتراضية كافة ، نظراً لأنها سجلت قيم (MSE) تفوق نظيرتها المتحققة في الطريقتين أعلاه واللتين سبقتها بالأفضلية . حيث بلغ مجموع تكرار أفضليتها (٢١) عند جميع أنواع أحجام العينات الافتراضية ، وأسهمت بنصيب نسبي منخفض قدره (13.0%) .

وعند متابعة قيمة المؤشر (MSE) حسب أنواع أحجام العينات برمتها ، فيبدو من الرسم البياني رقم (٢) بأنها تتركز بصورة رئيسة في العينات الصغيرة عندما (n=10) ، إذ تسهم الطرائق التقليدية بنسبة (17.6%) من إجمالي الطرائق المبحوثة عند هذا الحجم . فيما شكلت العينات الكبيرة (n=٧٥)

المرتبة الثانية بنسبة (15.2%) ، أما بصدد المرتبة الثالثة فلقد تقاسمتها كلاً من العينات الصغيرة عندما (n=25) والعينات المتوسطة (n=50) بنسبة (12.5%) ، في حين احتلت المرتبة الرابعة العينات الصغيرة عندما (n=35) بنسبة (6.7%) .

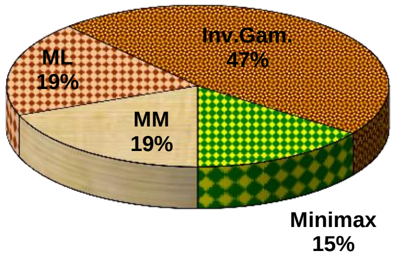
٥. إن المرتبة الرابعة والأخيرة احتلها مقدِّر بيز وفق كلاً من دالة الخسارة التربيعية المعدلة ودالة الخسارة التربيعية (المقترحة) ، واللتان اتسمتا بتساوي كفاءتهما من حيث الأفضلية وتحقيقهما تكراراً معدوماً عند جميع أحجام العينات المفترضة ، ويعزى ذلك لأن الـ (MSE) سجل قيماً تفوق نظيرتها المتحققة في الطرائق الأخرى واللواتي سبقتهما بالأفضلية .

ثالثاً :- لتكوين صورة عن طبيعة ترتيب المواقع المتعلقة بدرجة كفاءة وأفضلية طرائق التقدير قيد البحث ، باعتماد معيار متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لتقديرات معلمة القياس (θ) ، فان معطيات الجداول رقم (٧-٩) تعكس ما يأتي :-

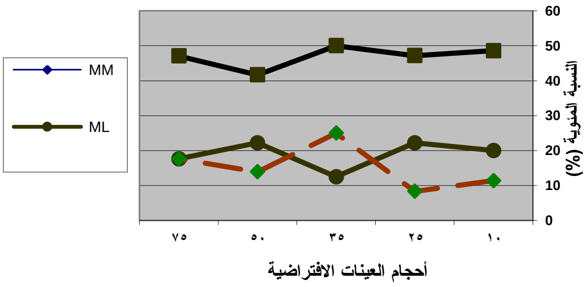
١. ان قيم متوسط الخطأ المطلق النسبي (MAPE) لتقدير المعلمة (θ) بطرائق التقدير المعتمدة للنماذج كافة ، تتناقص تدريجياً مع زيادة أحجام العينات المفترضة .

٢. على نطاق إجمالي أحجام العينات برُمَّتِها (n=10,25,35,50,75) فلقد انفردت طريقة مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة) بالأفضلية لارتفاع كفاءتها مقارنة مع سائر الطرائق الأخرى ، محتلة بذلك المرتبة الأولى نظراً لأنها سجلت اقل القيم لـ (MAPE) مقارنة ببقية الطرائق ، حيث بلغ إجمالي تكرارات أفضليتها للحالات المعتمدة (٨١) ، واستحوذت على (46.8%) لإجمالي أحجام العينات المبحوثة (انظر الرسم البياني رقم (٣)) .

الرسم البياني رقم (٣) :- افضلية الطرائق المبحوثة لتقدير معلمة القياس باعتماد المؤشر ((MAPE



الرسم البياني رقم (٤) :- افضلية الطرائق المبحوثة لتقدير معلمة القياس وفق أحجام العينات الافتراضية باعتماد المؤشر ((MAPE

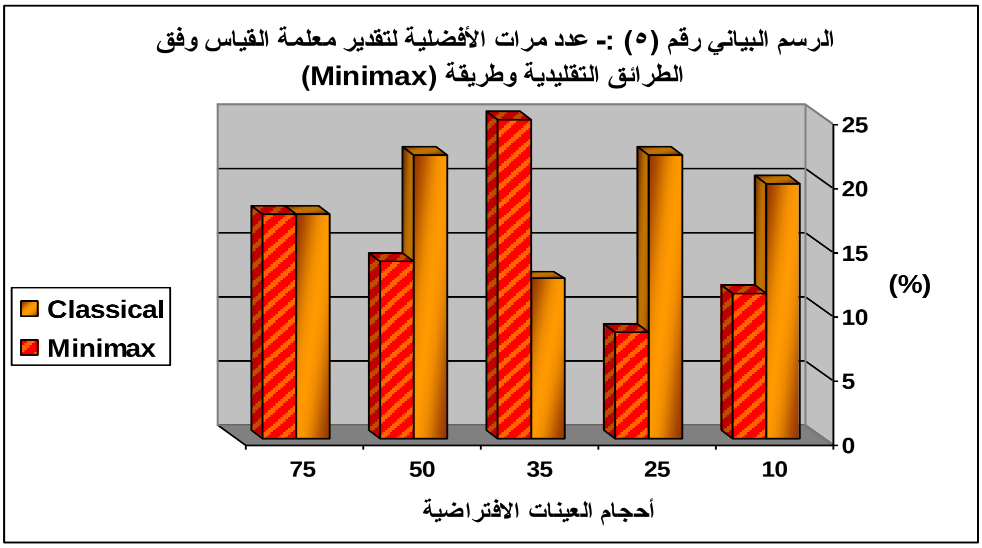


وعند تتبع مسار تطور هذا المؤشر من خلال تبيان الأهمية النسبية المناطة بتعاقب أحجام العينات ، يتضح من الرسم البياني رقم (٤) بأنها حققت مساراً متذبذباً خلالها . حيث تراوحت بين (41.7%) كحد أدنى عند العينات المتوسطة (n=50) و(50.0%) كحد أعلى عند العينات الصغيرة عندما (n=35) .

٣. حضيت كلاً من الطرائق التقليدية (Classical Methods) وطريقة (Minimax) بالمرتبة الثانية والثالثة وبنصيب نسبي (19.1% و15.0%) على التوالي ، وذلك عند مستوى إجمالي

أحجام العينات المفترضة . ويعكس الرسم البياني رقم (٤) إلى حقيقة تذبذب مسار الأهمية النسبية لهما عند مستويات تسلسل أحجام العينات الافتراضية المبحوثة .

أما على مستوى أنواع أحجام العينات الافتراضية فهناك تبايناً طفيفاً في تحديد الطريقة التي استحوذت على المرتبة الثانية والثالثة . ويشير الرسم البياني رقم (٥) إلى ان المرتبة الثالثة احتلتها طريقة (Minimax) عند أحجام العينات كافة باستثناء الحجمين (n=35,75) ، حيث انه عندما (n=35) فان طريقة (Minimax) تحتل المرتبة الثانية . أما عند العينات الكبيرة (n=75) فتتسم بتساوي الكفاءة لكلتا الطريقتين ، الطرائق التقليدية وطريقة (Minimax) محققتين نسبة قدرها (17.6%) .



٤. ان المرتبة الرابعة والأخيرة احتلتها الطريقتين المتمثلتين بمقدِّر بيز وكلاً من دالة الخسارة التربيعية المعدلة ودالة الخسارة التربيعية (المقترحة) ، حيث إنهما اشتركا في تحقيق نصيب معدوم قدره (0%) عند جميع أحجام العينات المفترضة .

الجدول رقم (٣)

القيم التقديرية لمعلمة القياس (θ) وفق كافة طرائق التقدير وأحجام العينات الافتراضية الناتجة عن تجربة المحاكاة رقم (١) عندما

θ = 0.5 P = 3 C = 1 r = 3 m = 1 ℓ = -1 δ = 2 R = 1000

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax
10	0.49827507	0.49827507	0.57493278	0.48140903	0.52963288	0.48220168
25	0.49844018	0.49844018	0.52652131	0.491743	0.5114677	0.49188175
35	0.4983323	0.4983323	0.51806823	0.49355494	0.50770926	0.49363105
50	0.50014395	0.50014395	0.51384653	0.49680311	0.506721	0.49683174
75	0.49957532	0.49957532	0.51176009	0.49659315	0.50546267	0.49661926

الجدول رقم (٤)

قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير معلمة القياس (θ) وفق كافة طرائق التقدير ورتبة أفضليتها وأحجام العينات الافتراضية الناتجة عن تجربة المحاكاة رقم (١) عندما

θ = 0.5 P = 3 C = 1 r = 3 m = 1 ℓ = -1 δ = 2 R = 1000

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax

10	**0.0082761**	**0.0082761**	**0.0166294**	**0.0086255**	**0.0081494**	**0.0080647**
25	**0.0030188**	**0.0030188**	**0.0040692**	**0.0030849**	**0.0029932**	**0.0030034**
35	**0.0021389**	**0.0021389**	**0.0026351**	**0.0021778**	**0.0021165**	**0.0021366**
50	**0.0016374**	**0.0016374**	**0.0019201**	**0.0016477**	**0.0016398**	**0.0016258**
75	**0.0014259**	**0.0014259**	**0.0016344**	**0.0014373**	**0.0014222**	**0.0014203**
n	**The Best**					
10	**3**	**3**	**6**	**5**	**2**	**1**
25	**3**	**3**	**6**	**5**	**1**	**2**
35	**3**	**3**	**6**	**5**	**1**	**2**
50	**2**	**2**	**6**	**5**	**4**	**1**
75	**3**	**3**	**6**	**5**	**2**	**1**

الجدول رقم (٥)

عدد مرات الأفضلية لكافة طرائق تقدير معلمة القياس (θ) وفق أحجام العينات الافتراضية والناتجة عن تجارب المحاكاة باعتماد المؤشر (MSE)

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax	SUM
10	6	6	0	0	12	10	34
25	4	4	0	0	14	10	32
35	2	2	0	0	15	11	30
50	4	4	0	0	13	11	32
75	5	5	0	0	14	9	33
SUM	21	21	0	0	68	51	161

الجدول رقم (٦)

الأهمية النسبية لعدد مرات الأفضلية لكافة طرائق تقدير معلمة القياس (θ) وفق أحجام العينات الافتراضية والناتجة عن تجارب المحاكاة باعتماد المؤشر (MSE)

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax	SUM
10	17.6	17.6	0.0	0.0	35.3	29.4	100
25	12.5	12.5	0.0	0.0	43.8	31.3	100
35	6.7	6.7	0.0	0.0	50.0	36.7	100
50	12.5	12.5	0.0	0.0	40.6	34.4	100
75	15.2	15.2	0.0	0.0	42.4	27.3	100
SUM	13.0	13.0	0.0	0.0	42.2	31.7	100

الجدول رقم (٧)

قيم متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لتقدير معلمة القياس (θ) وفق كافة طرائق التقدير ورتبة أفضليتها وأحجام العينات الافتراضية الناتجة عن تجربة المحاكاة رقم (١)عندما

$\theta = 0.5$ $P = 3$ $C = 1$ $r = 3$ $m = 1$ $\ell = -1$ $\delta = 2$ $R = 1000$

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax
10	0.1424549	0.1424549	0.2012983	0.1474222	0.1388237	0.1425304
25	0.0892134	0.0892134	0.1018317	0.0902767	0.0883455	0.0890764
35	0.0731038	0.0731038	0.0808622	0.0741317	0.0723034	0.0734255

50	0.0652654	0.0652654	0.0693625	0.065759	0.0646876	0.0653211
75	0.0604541	0.0604541	0.0644161	0.0608908	0.0599808	0.0605286
n	The Best					
10	2	2	6	5	1	4
25	3	3	6	5	1	2
35	2	2	6	5	1	4
50	2	2	6	5	1	4
75	2	2	6	5	1	4

الجدول رقم (٨)

عدد مرات الأفضلية لكافة طرائق تقدير معلمة القياس (θ) وفق أحجام العينات الافتراضية والناتجة عن تجارب المحاكاة باعتماد المؤشر (MAPE)

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax	SUM
10	7	7	0	0	17	4	35
25	8	8	0	0	17	3	36
35	4	4	0	0	16	8	32
50	8	8	0	0	15	5	36
75	6	6	0	0	16	6	34
SUM	33	33	0	0	81	26	173

الجدول رقم (٩)

الأهمية النسبية لعدد مرات الأفضلية لكافة طرائق تقدير معلمة القياس (θ) وفق أحجام العينات الافتراضية والناتجة عن تجارب المحاكاة باعتماد المؤشر (MAPE)

n	MM	ML	M. Quad.	P. Quad.	Inv.Gam.	Minimax	SUM
10	20.0	20.0	0.0	0.0	48.6	11.4	100
25	22.2	22.2	0.0	0.0	47.2	8.3	100
35	12.5	12.5	0.0	0.0	50.0	25.0	100
50	22.2	22.2	0.0	0.0	41.7	13.9	100
75	17.6	17.6	0.0	0.0	47.1	17.6	100
SUM	19.1	19.1	0.0	0.0	46.8	15.0	100

٤. الاستنتاجات والتوصيات :-

يتضمن هذا المبحث أهم الاستنتاجات التي توصّلت إليها الباحثة بالاعتماد على ما تم عرضه في الجانب النظري ونتائج تجارب المحاكاة التي تم الحصول عليها في الجانب التجريبي ، فضلاً عن أهم التوصيات التي تعتقد الباحثة أنها ضرورية في هذا البحث .

٤.١ الاستنتاجات :-

١. إن قيم مقاييس الكفاءة الإحصائية المتمثلة بمتوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لتقدير معلمة القياس (θ) على وفق طرائق التقدير المعتمدة

وللنماذج كافة تتناقص بشكل تدريجي مع زيادة أحجام العينات الافتراضية ولطرائق التقديركافة وهذا ما ينسجم مع ما تنص عليه النظرية الإحصائية .

٢. إن النتائج التي أبرزتها تجارب المحاكاة وبالاعتماد على قيم مقاييس الكفاءة الإحصائية المتمثلة بـ (MSE) و (MAPE) واللذان يشيران إلى مدى التطابق الواضح بينهما في الحكم على مصداقية الاعمام المتمثل بأن مُقَدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة) تبوأ مركز الصدارة من حيث الأفضلية لارتفاع كفاءته وتفوقه على صعيد أحجام العينات برمتها (n=10,25,35,50,75) ، ولكافة النماذج المعتمدة على سائر الطرائق المبحوثة الأخرى بغية تقدير معلمة القياس (θ) ، ومرد ذلك لأنها سجلت اقل القيم لمقاييس الكفاءة أعلاه بصورة تكاد تكون مطلقة ، وان هناك تحسناً في التقدير مقارنة بالطرائق الأخرى قيد البحث .

٣. ان الطرائق التقليدية (Classical Methods) وطريقة (Minimax) تتأرجح ما بين المرتبتين الثانية والثالثة ، وذلك بسبب الاختلاف الذي برز بين نوعي مقاييس الكفاءة الإحصائية في نص قراراتهما الصادرة . حيث ان (MSE) ينص على ان طريقة (Minimax) حضيت على المركز الثاني من حيث الأفضلية على امتداد أحجام العينات المبحوثة ككل بغية تقدير معلمة القياس (θ) . أما النتائج التي أبرزها المؤشر (MAPE) فجاءت مغايرة لنظيره الأول ، حيث ان الطرائق التقليدية احتلت المرتبة الثانية عند أحجام العينات (n=10,25,50) ، وعند العينات الصغيرة حينما (n=35) فان طريقة (Minimax) ستستحوذ على المرتبة الثانية . أما بصدد العينات الكبيرة (n=75) فتبرز ظاهرة تكافئ بأفضلية كلا الطريقتين واستحوذا عندها على المرتبة الثانية .

٤. ان قيم مقاييس الكفاءة الإحصائية (MSE) و (MAPE) النابعة عن نتائج تجارب المحاكاة ولجميع أحجام العينات المفترضة ، أبرزت بأن كلا الطريقتين المتمثلتين باستعمال مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية المعدلة أولاً ، ودالة الخسارة التربيعية (المقترحة) ثانياً ، تعطيان نتائج غير جيدة وضعيفة واللتان تكاد تكونا بعيدة كثيراً مقارنة بسائر الطرائق المعتمدة الأخرى.

٤.٢ **التوصيات** :-

١. اعتماد طريقة مقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية بافتراض توزيع الدالة الأولية يتبع دالة توزيع كاما المعكوس (المقترحة) في تقدير معلمة القياس (θ) ، عندما يكون وقت الفشل يتبع توزيع كاما ذي المعلمتين . إضافة إلى ضرورة تطبيقها على توزيعات إحصائية أخرى ، مثل توزيع

ويبل (Weibull Distribution) وتوزيع باريتو من النوع الأول (Pareto Distribution Of The First Kind) والتوزيع الأسي (Exponential Distribution) وذلك من خلال إجراء بحوث بنفس الاتجاه .

٢. تجنب والامتناع عن استخدام الطريقتين المتمثلتين بمقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية المعدلة أولاً ، ومقدِّر بيز ودالة الخسارة التربيعية (المقترحة) ثانياً ، لعدم كفاءتهما وعدم صلاحيتهما لتقدير معلمة القياس (θ) في توزيع كاما ذي المعلمتين في الجانب التجريبي .

٣. استخدام أساليب أخرى في التقدير لا تنتمي لمدرسة بيز مثل أسلوب إيجاد المُقَدِّر الحصين (Robust Estimator) .

٤. تطوير واشتقاق طرائق أخرى تستخدم لتقدير معلمات دالة توزيع كاما ذي المعلمتين ، ومقارنتها مع الطرائق التي تم استخدامها في هذا البحث ، مثل :-

- أسلوب بيز التجريبي (Empirical Bayes) .

- أسلوب (Lindley) .

٥. اعتماد صيغ أخرى لدالة الخسارة تختلف عن التي طُبِّقَت في هذا البحث .
٦. اعتماد دوال كثافة احتمالية أولية معلوماتية (Informative Prior p.d.f) ، وكذلك دوال كثافة احتمالية مرافقة طبيعية (Natural Conjugate Prior p.d.f) عند اشتقاق مقدرات بيزعلى وفق دالة خسارة بصيغ مختلفة .

المصــــــــــادر (References)

أولاً :- المصادر العربية

١. الآلوسي ، د. أحمد صالح والبياتي ، عادل زينل (١٩٨٩) ، " مقدمة في التحليل العددي " ، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ، جامعة بغداد ، بيت الحكمة .
٢. الجاسم ، صباح هادي والصراف ، زكي جواد ، (١٩٩٢) ، " نظرية القرارات الإحصائية " ، دار الحكمة للطباعة والنشر ، جامعة بغداد .
٣. الحمداني ، سيف الدين هاشم قمر (١٩٩٨) ، " استخدام أسلوب بيز في تقدير معلمات نماذج الانحدار غير الخطية مع تطبيق عملي – حالة نموذج نمو اللوجستك - " ، رسالة ماجستير ، قسم الإحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد .
٤. خيوكة ، عامر فاضل توفيق (١٩٩٠) ، " استخدام نموذج متعدد قنوات الخدمة في عمليات التصليح والإدامة – دراسة باستخدام المحاكاة مع تطبيق عملي في كلية طب الأسنان – جامعة بغداد " ، رسالة ماجستير ، قسم الإحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد – الجامعة المستنصرية .
٥. عبودي ، عماد حازم (١٩٩٦) ، " استخدام أسلوب بيز في تقدير وتحليل معالم نماذج الانحدار مع تطبيق عملي " ، أطروحة دكتوراه ، قسم الإحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد.

ثانياً :- المصادر الأجنبية :-

6. AL-Nasir , Dr. Abdul Majid and Dr. Dhafir H. Rashid (1988). " Statistical Inference " , Press Of Ministry Of Higher Education and Scientific Research – Baghdad .
7. Hogg, R.V. and Craig , A.T. (1970). " Introduction to Mathmatical Statistics " 3rd-edition. Macmillan Publishing Co., Inc.
8. Johansen, S. (1970). " Asymptotic Properties of the Restricted Bayesian Double Sampling Plan " . Technometrics, vol. 12, No.3 .
9. Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974). " Introduction to the Theory of Statistics : International Student Edition " 3rd-edition . McGraw-Hill, Inc .

10. Rohatgi , V. K. , (1979) . " An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics " , John Wiley & Sons .
11. Sinha, S. K., and Kale, B. K. (1979). " Life Testing and Reliability Estimation " , Wiley Eastern Ltd .