

Estimating the Reliability of the General Linear Failure Distribution Using Simulation

Amal S. Atta

Technology Institute, Foundation of Technical Education/ Baghdad
Email: amalatta13@yahoo.com

Nasser M. Abbas

Technology Institute, Foundation of Technical Education/ Baghdad

Received on: 28/1/2013 & Accepted on: 5/9/2013

ABSTRACT

This paper deals with estimating parameters and reliability function for the general linear failure rate distribution, which is an important probability distribution for studying the time to failure for machines and equipment. The parameters of location (α), and scale parameter (β), were estimated, while the shape parameter (θ) considered known. Three statistical methods are used for estimation which include maximum likelihood method, least square method, and proposed method including finding a mixed distribution, from using maximum likelihood and least square estimator with proportion (p), ($1 - p$). The comparison between estimators has been done through simulation procedure using different sample size like ($n = 15, 30, 50, 75, 100$), and each experiment is replicated ($L = 1000$). The comparison done using the statistical measure mean square error (MSE), all results of comparison were represented in Tables.

Keywords: Mean Square Error (MSE), Scale Parameter (β), location parameter (α), shape parameter (θ), the simulation.

تقدير معوليه توزيع الفشل الخطي العام باستخدام المحاكاة

الخلاصة

يتضمن هذا البحث تقدير معالم ومعوليه توزيع الفشل الخطي العام وهو من التوزيعات المهمة لدراسة وقت الاشتغال لحين الفشل للمعدات والمكائن والأنظمة وسيتم تقدير معلمي الموقع (α) ومعلمة القياس (β)، أما معلمة الشكل (θ) تعتبر معلومة. اعتمدت ثلاثة طرائق في التقدير هي طريقة الأماكن الأعظم وطريقة المربعات الصغرى، وطريقة مقترحة تتضمن اشتقاق صيغة لمقدر خليط ناتج من اعتماد مقدر الإمكان الأعظم بنسبة (p) ومقدر المربعات الصغرى بنسبة ($1 - p$)، واشتقت صيغة هذا المقدر وأجريت تجارب المحاكاة عند حجوم عينات ($n = 15, 30, 50, 75, 100$) وكررت كل تجربة ($L = 1000$) واستخدم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقارنة المقدرات أما مقارنة مقدر المعوليه فتمت عن طريق التحيز وهو الفرق بين القيمة الحقيقية والمقدرة، وقد عرضت نتائج مقدرات المعلمتين (β, α) وقيم التحيز لمقدر المعوليه في جداول خاصة.

المقدمة

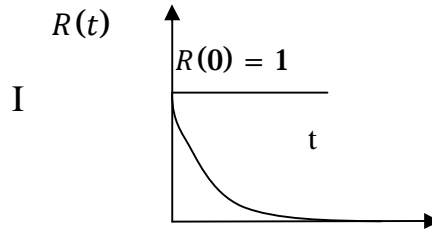
لقد ازداد الأهتمام بالمعولية بعد الانتشار الواسع للصناعة وزيادة التعقيدات الميكانيكية والكهربائية والإلكترونية وفي السابق (1940) كانت تقتصر البحوث على السيطرة النوعية وصيانة المكائن ولم تشخص المعولية إلا بعد أن بدأ المتخصصين في معرفة سلوك الفشل لمدة معينة، من أجل التوصل الى طرق تخفيض كلف الإنتاج والصيانة في مجال نظرية المعولية ونظرية البقاء لأن كلا من المعولية والبقاء لهما خاصية واحدة هي مقياس طول الحياة سواء كان لماكنة واحدة أو نظام أنتاجي أو لكائن حي، وقد تركزت البحوث العلمية والهندسية على تقدير المعولية واعتباره من المستلزمات الأساسية في العملية الإنتاجية وأنطلاقاً من تعريف المعولية، وهو احتمال عمل الجهاز تحت الشروط الخاصة باستخدام المستهلك لذلك الجهاز، أي أنها احتمال بقاء الجهاز أو النظام في العمل أو عدم فشل النظام في أداء عمله ضمن الفترة الزمنية $[0, t]$ رياضياً إذا كانت $R(t)$ ترمز لمعولية النظام عند الزمن (t) فإن: [3]

$$\begin{aligned} R(t) &= pr(T > t) \\ &= 1 - pr(T \leq t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

وأن دالة المعولية موجبة ومستمرة لجميع قيم (t) وأن:

$$\begin{aligned} R(0) &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) &= 0 \end{aligned}$$

الشكل (١) يوضح مخطط دالة المعولية.



الشكل (١) يوضح مخطط دالة المعولية [2]

وهناك توزيعات احتمالية لتوزيعات وقت الأشتغال لحين الفشل ومعرفة على الفترة $(0, \infty)$ للمتغير العشوائي (T) ، وهنا سوف نتناول تعريف مفهوم توزيع الفشل الخطي العام ودالته الاحتمالية والتراكمية ودالة المعولية مع الرسومات الخاصة بكل منهم ولمجموعات مختلفة من قيم المعلمات، إضافة الى طرائق تقدير المعلمتين (β, α) وهي طريقة الأماكن الأعظم، والمربعات الصغرى والمقدر المقترح وهو (مقدر خليط) إضافة الى الجانب التجريبي حيث تم شرح طريقة توليد البيانات وأعدمت طريقة الدستور لحل المعادلة الخاصة بتوليد البيانات. الطريقة الثالثة في التقدير هي الطريقة المختلطة والتي تعتمد على اشتقاق صيغة لمقدر خليط يمثل تركيب خطي من

مقدرين آخرين فإذا افترضنا أن المقدر الأول هو الأماكن الأعظم ($\hat{\theta}_1$) والمقدر الثاني ($\hat{\theta}_2$) هو المربعات الصغرى، فإن المقدر المختلط هو: [12]

$$\hat{\theta}_{Mix} = p\hat{\theta}_1 + (1 - p)\hat{\theta}_2 \quad \dots (2)$$

حيث أن p ثابت يحدد من خلال تصغير متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدر المختلط وحسب الخطوات التالية:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{Mix} &= p\hat{\theta}_1 + (1 - p)\hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_{Mix} - \theta &= p\hat{\theta}_1 + (1 - p)\hat{\theta}_2 - \theta \\ \hat{\theta}_{Mix} - \theta &= p\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 - p\hat{\theta}_2 - \theta \\ \hat{\theta}_{Mix} - \theta &= p(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) + (\hat{\theta}_2 - \theta) \\ \hat{\theta}_{Mix} - \theta &= p\{(\hat{\theta}_1 - \theta) - (\hat{\theta}_2 - \theta)\} + (\hat{\theta}_2 - \theta) \end{aligned}$$

بتربيع الطرفين:

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}_{Mix} - \theta)^2 &= p^2\{(\hat{\theta}_1 - \theta) - (\hat{\theta}_2 - \theta)\}^2 \\ &\quad + 2p(\hat{\theta}_2 - \theta)\{(\hat{\theta}_1 - \theta) - (\hat{\theta}_2 - \theta)\} + (\hat{\theta}_2 - \theta)^2 \end{aligned}$$

بإدخال التوقع على المعادلة:

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_{Mix}) &= p^2MSE(\hat{\theta}_1) - 2p^2E(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta) \\ &\quad + p^2MSE(\hat{\theta}_2) + 2pE(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta) \\ &\quad - 2pMSE(\hat{\theta}_2) + MSE(\hat{\theta}_2) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

ولأيجاد قيمة (p) نشق المعادلة (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial MSE(\hat{\theta}_{Mix})}{\partial p} &= 2pMSE(\hat{\theta}_1) - 4pE(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta) \\ &\quad + 2pMSE(\hat{\theta}_2) + 2E(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta) - 2MSE(\hat{\theta}_2) \end{aligned}$$

ومنها نحصل على قيمة (p).

$$p = \frac{MSE(\hat{\theta}_2) - E(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta)}{MSE(\hat{\theta}_1) - MSE(\hat{\theta}_2) - 2E(\hat{\theta}_1 - \theta)(\hat{\theta}_2 - \theta)} \quad \dots (4)$$

الهدف من البحث

يهدف لبحث الى دراسة معدلات الفشل للعدد والمكائن الهندسية في محاولة لتقليل هذه معدلات واعتماد التوقعات لتوزيعات وقت الاشتغال لحين الفشل تمهيدا لتلافي حدوثها .

Theoretical Base

الجانب النظري

تعرف معدلات الفشل أو الأخفاق (*Failure or Hazard Rate*) على أنها احتمال فشل المفردة خلال الفترة الزمنية $(t, t + \Delta t)$ ، علماً بأن المفردة لم تفشل حتى الوقت (t) ، ويرمز لدالة معدل الفشل بالرمز $\{h(t)\}$ وتساوي: [6]

$$h(t) = \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}$$

$$h(t) = \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad \dots (5)$$

$$h(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dF(t)}{dt} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

أما دالته التجميعية فهي:

$$H(t) = \int_0^t f(u) du \quad \dots (6)$$

كما ويمكن إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية من دالة معدل الفشل باستخدام العلاقة التالية:

$$f(t) = h(t) \exp \left[- \int_0^t f(u) du \right] \quad \dots (7)$$

يمر معدل المخاطرة بثلاثة مراحل خلال العمر التشغيلي هي:
المرحلة الأولى: يطلق عليها مرحلة التشغيل التجريبي أو مرحلة الفشل الابتدائي (*Initial Failure*) وتتميز بانخفاض كفاءة الأداء بسبب أخطاء في تصميم الجهاز أو أخطاء في التصنيع أو سوء الاستخدام للمكائن والمعدات الجديدة.
المرحلة الثانية: تمثل هذه المرحلة فترة التشغيل الطبيعي (*normal operation*) أو ما تسمى بمرحلة العمر النافع (*useful life*)، إذ أن معدل المخاطرة يميل الى أن يكون ثابت في هذه المرحلة.
المرحلة الثالثة: وهي المرحلة الأخيرة من مراحل عمر المعدات وتعرف بمرحلة التقادم والاستهلاك (*wear - out*) وتتميز بانخفاض حاد في كفاءة الأداء وأرتفاع نسب التلف والضياعات نتيجة لكثرة العطلات والتوقفات الاضطرابية ويمكن ملاحظة ذلك من خلال المنحنى الحوضي (*Bath tube curve*).

التوزيع الخطي العام لمعدلات الفشل

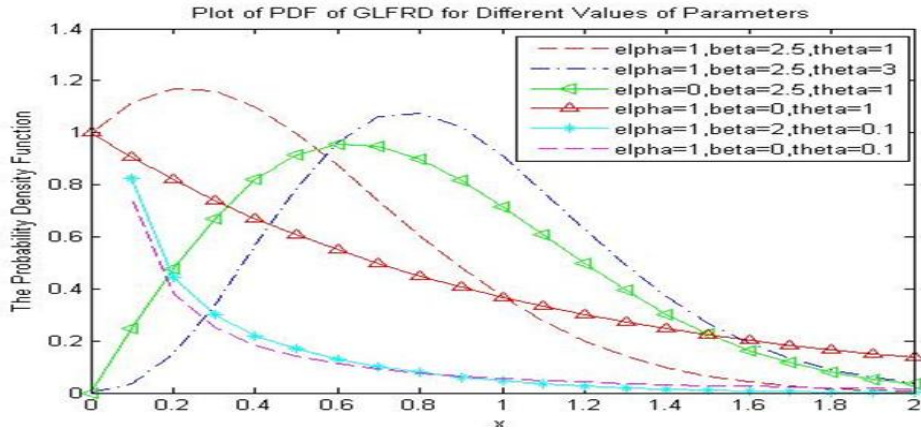
General Linear Failure Rate Distribution (GLFRD)

يعتبر هذا التوزيع الحالة العامة لبعض توزيعات الفشل الخاصة مثل التوزيع الأسّي وتوزيع رالي وغيرها من التوزيعات التي تعني بأوقات الأشتغال لحين الفشل، أو تعني بأوقات الفشل أو الحياة لمجموعة من أنظمة البقاء. يمتلك هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية (*p. d. f*) هي: [5]

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta(\alpha + \beta\alpha) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^{\theta-1} \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \quad \dots (8)$$

$\alpha, \beta \geq 0, x \geq 0, \theta > 0$

حيث تمثل (α) معلمة الموقع، وتمثل (β) معلمة القياس، أما (θ) فتمثل معلمة الشكل. وتمتلك الدالة (8) قيمة منوالية واحدة (*uni nodal*) لبعض قيم المعلمات وتكون متناقصة لقيم أخرى، كما موضح في الشكل (2).



شكل (2) دالة الكثافة الاحتمالية ($p.d.f$) للتوزيع الخطي العام ولقيم المعلمات المختلفة. [2]

حيث أن:

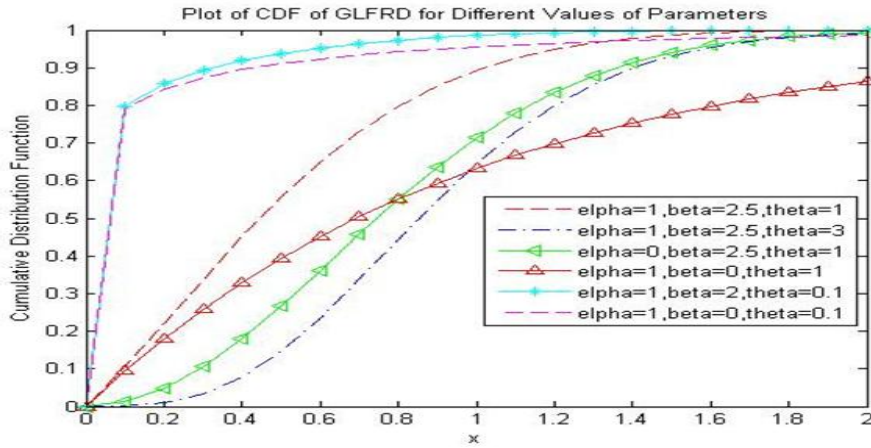
x : قيمة المتغير العشوائي

α : معلمة الموقع (*Location Parameter*)

β : معلمة القياس (*Scale Parameter*)

θ : معلمة الشكل (*Shape Parameter*)

وتوجد لتوزيع الفشل الخطي العام دالة احتمالية تراكمية (*Cumulative distribution function*) معرفة بالمعادلة (7) وممثلة بالشكل (3).



شكل (3) دالة الكثافة الاحتمالية (CDF) للتوزيع الخطي العام ولقيم المعلمات المختلفة. [2]

ويمتلك دلة تجميعية ($c.d.f$) التالية: [2]

$$F(x) = \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^{\theta} \quad \alpha, \beta, x \geq 0, \theta > 0 \quad \dots (9)$$

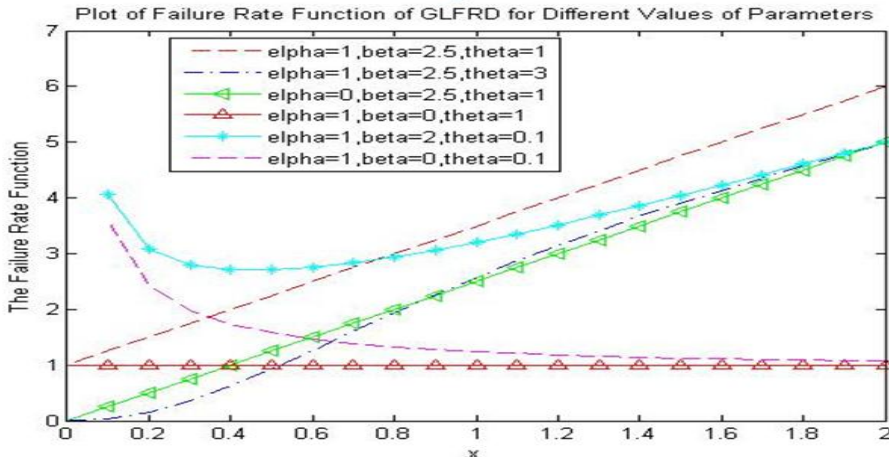
ومن المعادلة (9) نجد أن دالة المعولية (*Reliability Function*) لهذا التوزيع هي:

$$R(x) = 1 - F(x) = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^{\theta} \quad \dots (10)$$

وتستعمل دالة المعولية لوصف احتمال البقاء للمنظومة المدروسة والتي تبدأ بأعلى احتمال لها عند بداية التشغيل وتبدأ بالتناقص مع زيادة الفترة الزمنية. وتكون دالة المخاطرة ثابتة عندما $(\theta = 1)$ و متزايدة عندما $(\theta > 1)$ و متناقصة عندما $(\theta < 1)$ وهي أيضاً ذات شكل $[2]$ (Bath tube curve) وبذلك هي تمثل كافة الحالات الممكنة التي تأخذها دالة المخاطرة. تكون الصيغة الرياضية لدالة المخاطرة (hazard function) بالصيغة التالية:

$$h(t) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\theta(\alpha + \beta x) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^{\theta-1} \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right]}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^{\theta}} \quad \dots (11)$$

والشكل (4) يوضح دالة المخاطرة.



شكل (4) دالة المخاطرة للتوزيع الخطي العام ولقيم المعلمات المختلفة. [٢]

Estimation Methods [1 & 14]¹

طرائق التقدير:

نتناول في هذا البند طرائق تقدير معلمات توزيع (GLFRD) بهدف الحصول على المقدرات التي يمكن اعتمادها في الجانب التجريبي والتطبيقي باعتبار أن معلمة الشكل (θ) ثابتة ومن هذه الطرائق:

a - طريقة الأمكان الأعظم: Maximum Likelihood Method (MLE)

تعتبر هذه الطريقة أحد أهم طرائق التقدير والتي تهدف الى جعل دالة الأمكان الأعظم في نهايتها العظمى، فإذا كانت (x) تتوزع وفقاً لتوزيع معدل الفشل الخطي العام فإن دالة الأمكان الأعظم ستكون:

$$\begin{aligned}
 L &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \beta, \theta) \\
 &= \prod_{i=1}^n \theta (\alpha + \beta x_i) \exp \left[- \left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^{\theta-1} \\
 &= \prod_{i=1}^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) \right) \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - \exp \left[- \left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \right) \right)^{\theta-1} \\
 &\quad \exp \left[- \alpha \sum_{i=1}^n x_i \right] \exp \left[- \left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \dots (12)
 \end{aligned}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (12) نحصل على:

$$\begin{aligned}
 \log L(x_1, \dots, x_n; \alpha, \beta, \theta) &= n \log \theta - \alpha \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
 &+ \sum_{i=1}^n \log (\alpha + \beta x_i) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \right\} \dots (13)
 \end{aligned}$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (13) بالنسبة الى (α, β) (على اعتبار أن θ) ثابتة) على التوالي ومساواتها بالصفر نحصل على المعادلتين الطبيعيين التاليين.

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} E_1 = \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i} - \sum_{i=1}^n x_i \\
 &+ (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i \exp \left[- \left(\hat{\alpha} x_i + \frac{\hat{\beta}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ 1 - \exp \left[- \left(\hat{\alpha} x_i + \frac{\hat{\beta}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}} \dots (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} E_1 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
 &+ \frac{1}{2} (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\left\{ \exp \left[- \left(\hat{\alpha} x_i + \frac{\hat{\beta}}{2} x_i^2 \right) \right] - 1 \right\}} \dots (15)
 \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين (14) و (15) بالنسبة الى $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ عمودياً بأستعمال طريقة نيوتن - رافسون التكرارية يتم الحصول على مقدر الأماكن الأعظم لكل معلمة من خلال منظومة المعادلات التكرارية التالية:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{(k+1)} \\ \hat{\beta}_{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{(k)} \\ \hat{\beta}_{(k)} \end{pmatrix} - (J_{(k)})^{-1} (f_{(k)}) \dots (16)$$

حيث أن:

$$J_{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Where;

$$a = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\hat{\alpha}_{(k)} + \hat{\beta}_{(k)} x_i)^2} - (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ 1 - \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^2}$$

$$b = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\hat{\alpha}_{(k)} + \hat{\beta}_{(k)} x_i)^2} - \frac{1}{2} (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3 \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ 1 - \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^2}$$

$$c = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\hat{\alpha}_{(k)} + \hat{\beta}_{(k)} x_i)^2} - \frac{1}{2} (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3 \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ 1 - \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^2}$$

$$d = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\hat{\alpha}_{(k)} + \hat{\beta}_{(k)} x_i)^2} - \frac{1}{2} (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4 \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ 1 - \exp \left[- \left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^2}$$

$$f(k) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\hat{\alpha}_{(k)} + \hat{\beta}_{(k)} x_i)} + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i \exp \left[-\left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ 1 - \exp \left[-\left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\hat{\alpha}_{(k)} + \hat{\beta}_{(k)} x_i)} + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \exp \left[-\left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right]}{\left\{ \exp \left[-\left(\hat{\alpha}_{(k)} x_i + \frac{\hat{\beta}_{(k)}}{2} x_i^2 \right) \right] - 1 \right\}} \end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على قيم ابتدائية للمعلمات أذ يستعمل الوسط الحسابي للبيانات كقيم أولية. ويتكرر العلاقة (16) الى (L) من المرات الى أن تستقر النتائج ويتم الحصول على المقدرات، فإذا كانت $(\hat{\alpha}_{MLE})$ و $(\hat{\beta}_{MLE})$ هي مقدرات طريقة الأماكن الأعظم لكل من (α, β) على التوالي فإن مقدر دالة المعولبية وبالاستناد على خاصية الثبات التي تتميز بهذه الطريقة سوف يأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{R}_{MLE} = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\hat{\alpha}_{MLE} x_i + \frac{\hat{\beta}_{MLE}}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^{\theta} \quad \dots (17)$$

Ordinary Least Square Method (OLS) - طريقة المربعات الصغرى:

تعتمد طريقة المربعات الصغرى على محاولة إيجاد المقدرات التي تتصف كونها تقدم أصغر مجموع مربعات خطأ يمكن ان ينتج من حاصل الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الحقيقية ويمكن استخدام أسلوب المربعات الصغرى للمعلمات الخاصة بتوزيع (GLFRD) وهي (α, β) على اعتبار أن (θ) معلومة. وعليه فإن مقدرات المربعات الصغرى للمعلمات (α, β) يمكن إيجادها من خلال المعادلة التالية:

$$F(x) = \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}^{\theta} \quad \dots (18)$$

$$[F(x)]^{1/\theta} = \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \right\}$$

وأن:

$$\log\{1 - [F(x)]^{1/\theta}\} = \left[-\left(\alpha x_i + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \right] \quad \dots (19)$$

نفرض نموذج أتحدار خطي متعدد هو:

$$y_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i^2 + \epsilon_i$$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى:

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i^2)^2$$

وبأخذ المشتقة الجزئية لـ $(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2)$ بالنسبة الى (λ_1) و (λ_2) ومساواتها بالصفر ومن ثم تبسيطها نحصل على:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial \lambda_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i^2) (-x_i)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial \lambda_2} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i^2) (-x_i^2)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 \quad \dots (20)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 \quad \dots (21)$$

وبضرب المعادلة (20) بـ $(-\sum_{i=1}^n x_i^3)$ و المعادلة (21) بـ $(-\sum_{i=1}^n x_i^2)$ نحصل على :

$$-\sum_{i=1}^n x_i^3 \sum_{i=1}^n y_i x_i = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^3 + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 \quad \dots (22)$$

$$-\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \dots (23)$$

وبحل المعادلتين (22) و (23) آنياً نحصل على:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^3 \sum_{i=1}^n y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^4 \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i^3)^2} \quad \dots (24)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^3 \sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^4 \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i^3)^2} \quad \dots (25)$$

$$\because \hat{\lambda}_1 = -\alpha \Rightarrow \hat{\alpha}_{OLS} = -\hat{\beta}_1$$

$$\because \hat{\lambda}_2 = -\frac{\beta}{2} \Rightarrow \hat{\beta}_{OLS} = -2\hat{\beta}_2$$

أما (F) فيمكن تقديرها بـ $(\hat{F}_i = \frac{i}{n+1})$ وهو مقدر لاعملي لدالة $(F(x))$.

مراحل تجارب المحاكاة: Simulation Experiments Stages

تتضمن مراحل بناء المحاكاة خمسة مراحل مهمة هي:

المرحلة الأولى: تتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

a- اختبار قيم افتراضية للمعلمتين (α, β) مع ثبات معلمة الشكل (θ) وتم تشكيل الحالات كما في الجدول (١).

جدول (1) القيم الافتراضية للمعلمات والنماذج المقترحة .

Cases	α	β	θ
1	0.5	0.5	0.5
2	1	1.5	0.5
3	1	1	1
4	1	0.5	1

b - يتم اختيار خمسة أحجام مختلفة للعينة وهي ($n = 15, 30, 50, 75, 100$) وكان تكرار هذه التجارب مساوياً إلى ($L = 1000$) لكل تجربة. المرحلة الثانية: يتم في هذه المرحلة توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) بطريقة التحويل المعكوس وعلى وقت التوزيع الخطي العام لمعدلات الفشل باستخدام الدالة التجميعية للتوزيع وكما يأتي:

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^\theta \quad \dots (26)$$

وبإبدال ($F(x)$) بـ (U) التي تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $(0, t)$ ،

$$U_i \sim U(0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

فإن العلاقة (26) تصبح كما يأتي:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\}^\theta \\ U^{1/\theta} &= \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \right] \right\} \\ \log[1 - U^{1/\theta}] &= - \left(\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \right) \\ \beta x^2 + 2\alpha x + 2 \log[1 - U^{1/\theta}] &= 0 \quad \dots (27) \end{aligned}$$

وباستخدام الدستور لحل المعادلة (27) والحصول على قيم (x) التي تكون ($x \geq 0$):

$$x = \frac{1}{\beta} \left\{ -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta \log[1 - U^{1/\theta}]} \right\} \quad \dots (28)$$

من المعادلة (28) يتم توليد بيانات تتوزع التوزيع الخطي العام لمعدلات الفشل. المرحلة الثالثة: يتم في هذه المرحلة تقدير المعلمات للتوزيع الخطي العام لمعدلات الفشل للمعلمتين (α, β) وللطرائق المبينة في الجانب النظري وكذلك تقدير المعولية عند ($T = 1, 3$). المرحلة الرابعة: هي مرحلة المقارنة بين طرائق التقدير، حيث تم أستعمال مقياس متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين المعلمات ومقياس التحيز ($Bias$) للمقارنة بين مقدرات المعولية.

$$MSE(\hat{\alpha}) = \frac{\sum_{i=1}^L (\hat{\alpha}_i - \alpha)^2}{L-1} \quad \dots (29)$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^L (\hat{\beta}_i - \beta)^2}{L-1} \quad \dots (30)$$

$$Bias(\hat{R}) = R - \hat{R}$$

حيث تمثل (L) عدد التكرارات لكل تجربة.

Simulation Analysis

تحليل نتائج المحاكاة

سيتم في هذا المبحث عرض لنتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لأيجاد أفضل مقدر لمعلمات ودالة التوزيع الخطي العام لمعدلات الفشل حسب الطرائق التي تمت مناقشتها وكما موضحة في الجداول (٢):

جدول (2) قيم معدل تقدير المعلمتين ومتوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات ولجميع الطرائق للحالة الأولى.

n	Parameter	MSE			Best
		MLE	Mix.	OLS	
15	α	(0.51794) 0.20489	(18.84156) 9.06379	(0.61519) 0.38469	MLE
	β	(0.92160) 1.01612	(3.410869) 5.4448	(0.72214) 1.10871	MLE
30	α	(0.50219) 0.06468	(7.18922) 0.7989	(0.45143) 0.10031	MLE
	β	(0.63041) 0.20979	(2.03792) 0.4573	(0.44254) 0.26602	MLE
50	α	(0.46528) 0.05330	(0.51684) 0.06259	(0.39903) 0.07835	MLE
	β	(0.57450) 0.08560	(0.46729) 0.08396	(0.39553) 0.08615	MLE
75	α	(0.50815) 0.03483	(0.552345) 0.08216	(0.37843) 0.07715	MLE
	β	(0.57461) 0.07165	(0.53567) 0.09812	(0.43156) 0.07965	MLE
100	α	(0.52081) 0.02144	(0.57795) 0.15587	(0.37558) 0.07212	MLE
	β	(0.48577) 0.03138	(0.48024) 0.19184	(0.36372) 0.07040	MLE

من خلال النتائج المبينة في الجدول (2) نلاحظ: عند جميع حجوم العينة ($n = 15, 30, 50, 75, 100$) كانت طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل في تقدير المعلمتين (α, β) مقارنة بطريقتي OLS والمربعات الصغرى.

جدول (3) قيم معدل تقدير المعلمتين ومتوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات ولجميع الطرائق للحالة الثانية.

n	Parameter	MSE			Best
		MLE	Mix.	OLS	
15	α	(0.89430) 0.40814	(0.98881) 0.55212	(1.05727) 0.72978	MLE
	β	(2.79202) 2.66077	(3.16616) 4.81725	(2.07042) 15.54076	MLE

30	α	(0.88015) 0.26259	(0.03057) 0.31939	(0.86482) 0.41559	MLE
	β	(2.39411) 3.95784	(2.23572) 5.93599	(1.73477) 3.69206	OLS
50	α	(1.07287) 0.19259	(1.09899) 0.22329	(0.83415) 0.27468	MLE
	β	(1.73204) 1.00122	(2.15764) 12.37942	(1.15584) 0.98910	OLS
75	α	(1.02767) 0.09500	(1.04194) 0.10374	(0.81517) 0.25482	MLE
	β	(1.55397) 0.50556	(1.36056) 0.54291	(1.06359) 0.81839	MLE
100	α	(1.02858) 0.07419	(1.03939) 0.08160	(0.70142) 0.31327	MLE
	β	(1.54184) 0.49369	(1.40612) 0.53153	(1.25270) 0.80876	MLE

من خلال النتائج المبينة في الجدول (3) نلاحظ:

أن طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل في تقدير المعلمة (α) في جميع حجومات العينات وتأتي طريقة المربعات الصغرى أما عند تقدير المعلمة (β) فإن طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل عند حجومات العينات ($n = 15, 75, 100$) وطريقة المربعات الصغرى هي الأفضل عند $(n = 30, 50)$.

جدول (٤) قيم معدل تقدير المعلمتين ومتوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات ولجميع الطرائق للحالة الثالثة.

n	Parameter	MSE			Best
		MLE	Mix.	OLS	
15	α	(1.15812) 0.59263	(7.43272) 4.36141	(1.02370) 0.33519	MLE
	β	(2.63134) 8.63488	(3.11721) 3.70766	(1.26400) 1.06524	MLE
30	α	(1.05137) 0.12983	(1.22269) 0.13917	(0.94446) 0.28994	MLE
	β	(1.62814) 0.44824	(1.36357) 0.35083	(1.25968) 0.48691	OLS
50	α	(0.95755) 0.08894	(0.98962) 0.09678	(0.66251) 0.24580	OLS
	β	(1.66019) 0.20783	(1.48285) 0.21312	(1.21478) 0.37381	OLS
75	α	(0.99266) 0.08038	(0.98520) 0.08220	(0.68875) 0.31758	MLE
	β	(1.65147)	(1.52604)	(1.21999)	Mix.

		0.23468	0.23178	0.29016	
100	α	(1.01810) 0.05112	(1.03590) 0.05222	(0.70817) 0.26104	MLE
	β	(1.54081) 0.16247	(1.44137) 0.15752	(1.10799) 0.22360	Mix.

من خلال النتائج المبينة في الجدول (4) نلاحظ:
 أن طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل في تقدير المعلمة (α) في جميع حجومات العينات، أما طريقة المربعات الصغرى فهي الأفضل عند حجومات العينات ($n = 15$)، أما عند تقدير المعلمة (β) فإن طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل عند حجومات العينات ($n = 50$) وطريقة المربعات الصغرى هي الأفضل عند ($n = 15$)، و (Mix) عند حجومات العينات ($n = 30,75,100$)

جدول (5) قيم معدل تقدير المعلمتين ومتوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات ولجميع الطرائق للحالة الرابعة.

n	Parameter	MSE			Best
		MLE	Mix.	OLS	
15	α	(0.93240) 0.17434	(21.49559) 6.1396	(0.70935) 0.29107	MLE
	β	(1.07988) 2.62620	(29.04294) 6.26205	(0.71352) 0.99414	OLS
30	α	(1.00236) 0.12458	(1.05431) 0.14526	(0.73747) 0.23667	MLE
	β	(0.68027) 0.32601	(0.85220) 2.06581	(0.47826) 0.22028	OLS
50	α	(0.94380) 0.06605	(0.97241) 0.06504	(0.81434) 0.15476	Mix.
	β	(0.61827) 0.17365	(0.58562) 0.69712	(0.39136) 0.16226	OLS
75	α	(0.93649) 0.05245	(0.95722) 0.05283	(0.72359) 0.21570	MLE
	β	(0.63556) 0.13909	(0.56059) 0.02533	(0.44089) 0.11479	OLS
100	α	(0.98371) 0.02418	(0.56059) 0.02533	(0.44089) 0.16293	MLE
	β	(0.55795) 0.06311	(0.49326) 0.06181	(0.35801) 0.09932	Mix.

من خلال النتائج المبينة في الجدول (4) نلاحظ:
 أن طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل في تقدير المعلمة (α) في جميع حجومات العينات، و (Mix) عند حجومات العينات ($n = 50$)، أما عند تقدير المعلمة (β) فإن طريقة المربعات الصغرى هي الأفضل عند ($n = 15,30,50,75$)، و (Mix) عند حجومات العينات ($n = 100$).

جدول (6) قيم التحيز (*Bias*) لتقدير الدالة المعولية ولجميع الطرائق للحالة الأولى.

<i>n</i>	<i>T</i>	<i>Bias</i>			<i>Best</i>
		\hat{R}_{MLE}	\hat{R}_{Mix}	\hat{R}_{OLS}	
15	1	0.06368	0.27361	0.06309	\hat{R}_{OLS}
	3	0.01015	0.01182	0.00876	\hat{R}_{OLS}
30	1	0.02089	0.27361	-0.02661	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00531	0.01182	-0.00594	\hat{R}_{MLE}
50	1	0.00082	0.00015	-0.01121	\hat{R}_{Mix}
	3	0.00245	-0.00120	-0.00593	\hat{R}_{Mix}
75	1	0.01430	0.02174	-0.05705	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00359	0.00323	-0.01148	\hat{R}_{Mix}
100	1	0.00440	0.02111	-0.07268	\hat{R}_{MLE}
	3	-0.00001	0.00161	-0.02022	\hat{R}_{MLE}

من نتائج جدول (6) يتضح بأن طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل في تقدير المعولية تليها طريقة (*Mix*) ثم طريقة المربعات الصغرى.

جدول (7) قيم التحيز (*Bias*) لتقدير الدالة المعولية ولجميع الطرائق للحالة الثانية.

<i>n</i>	<i>T</i>	<i>Bias</i>			<i>Best</i>
		\hat{R}_{MLE}	\hat{R}_{Mix}	\hat{R}_{OLS}	
15	1	0.03906	0.05207	0.02730	\hat{R}_{OLS}
	3	0.00002	0.00003	0.00003	\hat{R}_{MLE}
30	1	0.02629	0.02433	-0.00171	\hat{R}_{OLS}
	3	0.00002	0.00002	0.00001	\hat{R}_{OLS}
50	1	-0.01864	0.03268	-0.03927	\hat{R}_{MLE}
	3	-0.00019	0.00002	-0.00019	\hat{R}_{Jak}
75	1	0.00507	-0.00269	-0.04875	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00001	-0.00002	-0.00033	\hat{R}_{MLE}
100	1	0.00460	-0.00072	-0.05168	\hat{R}_{Mix}
	3	0.00001	-0.00001	-0.00018	\hat{R}_{MLE}

من نتائج جدول (7) يتضح بأن طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل في تقدير المعولية تليها طريقة (*Mix*) ثم طريقة المربعات الصغرى.

جدول (8) قيم التحيز (*Bias*) لتقدير الدالة المعولية ولجميع الطرائق للحالة الثالثة.

<i>n</i>	<i>T</i>	<i>Bias</i>			<i>Best</i>
		\hat{R}_{MLE}	\hat{R}_{Mix}	\hat{R}_{OLS}	
15	1	0.13886	0.22300	0.03217	\hat{R}_{OLS}
	3	0.00055	0.00055	0.00039	\hat{R}_{OLS}
30	1	0.06830	0.07422	0.01597	\hat{R}_{OLS}
	3	0.00052	0.00049	0.00034	\hat{R}_{OLS}
50	1	0.05577	0.04603	-0.05772	\hat{R}_{Mix}
	3	0.00052	0.00048	-0.00003	\hat{R}_{OLS}
75	1	0.06084	0.04904	-0.04974	\hat{R}_{Mix}
	3	0.00052	0.00049	0.00003	\hat{R}_{OLS}
100	1	0.05592	0.05049	-0.05991	\hat{R}_{Mix}
	3	0.00052	0.00048	-0.00026	\hat{R}_{OLS}

من نتائج جدول (8) يتضح بأن طريقة المربعات الصغرى هي الأفضل في تقدير المعولية تليها طريقة (Mix).

جدول (9) قيم التحيز (*Bias*) لتقدير الدالة المعولية ولجميع الطرائق للحالة الرابعة.

<i>n</i>	<i>T</i>	<i>Bias</i>			<i>Best</i>
		\hat{R}_{MLE}	\hat{R}_{Mix}	\hat{R}_{OLS}	
15	1	0.05711	0.28650	-0.05784	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00477	0.00524	0.00445	\hat{R}_{OLS}
30	1	0.02531	0.05896	-0.09001	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00293	0.00433	-0.00747	\hat{R}_{MLE}
50	1	0.00083	0.00432	-0.07771	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00159	0.00136	-0.00968	\hat{R}_{Mix}
75	1	0.00122	-0.00359	-0.10255	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00179	0.00071	-0.01044	\hat{R}_{Mix}
100	1	0.00361	-0.15959	-0.25149	\hat{R}_{MLE}
	3	0.00100	-0.01496	-0.04795	\hat{R}_{MLE}

مناقشة النتائج

- من نتائج جدول (9) يتضح بأن طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل ثم في تقدير المعولية تليها طريقة (Mix) طريقة المربعات الصغرى .
- نستنتج من تحليل نتائج التقدير المستحصلة من الجداول (2,3,4,5) أن طريقة الأماكن الأعظم هي أفضل من طريقتي (Mix) والمربعات الصغرى في تقدير المعلمة (α) ، أما عند تقدير المعلمة (β) كانت طريقة المربعات الصغرى هي الأفضل في معظم الحالات المدروسة.
- أما فيما يتعلق بتقدير دالة المعولية فتبين الجداول (6,7,8,9) أن طريقة الأماكن الأعظم هي الأفضل من الطريقتين الأخرتين وتليها بالأفضلية كل من طريقة المربعات الصغرى ثم طريقة (Mix).

الاستنتاجات والتوصيات

- 1 - أنضح من نتائج المحاكاة أن المقدر المختلط أفضل من المقدرين الآخرين (الأماكن الأعظم والمربعات الصغرى)، لأنه تركيب خطي من المقدرين.
- 2 - أهمية تقدير المعلمات تكمن في تقدير معولية هذا التوزيع وهو احتمال بقاء المكائن والمعدات تعمل بعد مرور (t) من الزمن، مما يسمح بذلك بأجراء المراقبة على المكائن وأعداد توقيات الصيانة الدورية والوقائية.
- 3 - في حالة العينات الكبيرة يكون المقدر المختلط لمعلمة القياس (β) أفضل من المقدرين الآخرين، لذلك عمل الباحث على دراسة أحد التوزيعات الاحتمالية لوقت الأشتغال لحين الفشل الذي يرافقه المكائن والعدد الهندسية ألا وهو توزيع الفشل الخطي العام وتقدير معلمته ومن ثم تقدير المعولية باعتبارها تمثل احتمال أشتغال الجهاز أو العدد بعد مرور (t) من الزمن.
- 4 - استخدام طريقة الأماكن الأعظم في تقدير المعلمة (α) .
- 5 - استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير المعلمة (β) خصوصاً في حالات العينات الصغيرة والمتوسطة.
- 6 - استخدام طريقة (Mix) في تقدير المعلمة (β) خصوصاً في حالات العينات الكبيرة.

المصادر

- [1]. Al – Kutubi, H. S. and N. A. Ibrahim, 2009. On the estimation of survival function and parameter exponential life time distribution. J. Math. Stat., 5:130- 35. DOI:10.3844/jmssp.2009.130.135
- [2]. Ammar M. Sarhan and D. Kunda (2009), "Generalized linear failure rate distribution", Communications in Statistics. Theory and method, Vol.38, No. 5, 642 – 660.
- [3]. Bakar, D., Bridges, D., Hunter, R., Johnson, G., Krupa, J., Murphy, J. and Sorenson, K. (2002). "Gidebook to Decision – Making Methods ", WSRC-IM-2002-00002, Department of Energy, USA.
- [4]. Bather, J. (2000). "Decision Theory". Chichester: John Wiley & Sons, Inc.
- [5]. Igor A. Ushakov (2012), "Probabilistic Reliability Models", Willy, ISBN: 978-1-1183-4183-4.

- [6]. Lawless, J. F. (2003), "statistical model and methods for life time data", Jhon Weily & Sons, Inc. NewJersy.
- [7].L. Pace, A. Salvan, L. Ventura, (2006), "Likelihood-based discrimination between separate scale and regression models" [CiTO] Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 136, No. 10. (Oct 2006), pp. 3539-3553.
- [8]. Nasir, S.A and Al-Anber, J.N, 2012. A Comparison of the Bayesian and Other Methods for Estimation of Reliability Function for Burr-Distribution. *J. Math. & Stat.*, 8(1):42-48, DOI: 10.3844 / jmssp. 2012.42.48.
- [9]. Nelson W. (1982), "Applied life data analysis", John Willey & Sons.
- [10]. Raqab, Z.M. and Ahsanullah, M., (2001) , Estimation of the location and scale parameters of generalized exponential distribution based on order statistics , journal of statistic and computer simulation, vol.69, pp 109-123.
- [11]. Rosaiah, K., Kantam, R. R. L. and Santosh Kumar, Ch. (2007). "Reliability of Test Plans for Exponentialed log-Logistic Distribution"; *Economic Quality Control*, 21(2), 165-175.
- [12]. Rausand, M. and Hoyland, A., (2004), *System Reliability Theory; Models, Statistical methods, and Applications*, John Wuiley & Sons, New York.
- [13]. Roy, M. K. Podder, C. K. & Bhuiyan, K. J. (2002),"Minimax estimation of the scale parameter of the Weibull distribution for the quadratic and MLINEX loss functions", *Jahangirnagar University Journal of Science*, 25, 277 – 285.
- [14]. Saad Jamaan A. Al – Malki (2007), "some useful generalized statistical distributions", [http/ faculty ksn. Edu. SA / Ammar 20% Sarhan / documents 1 abs – 1. Pdf](http://faculty.ksn.edu.sa/~Ammar20%20Sarhan/documents%201%20abs%20-%201.pdf).