مقارنة طريقة الامكان الاعظم مع اساليب بيزية لتقدير معدل الفشل بوجود بيانات مراقبة من النوع الاول لعينات الفشل

أ.صباح هادي الجاسم
كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد
طالبة الماجستير. وفاء جعفر حسين (*)
كلية الادارة والاقتصاد / جامعة واسط

المستخلص
تم في هذا البحث مقارنة طرائق التقدير الاتية لمعدل الفشل بوجود بيانات مراقبة من النوع الاول بتوظيف اسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو (Monte Carlo)وهذه الطرائق هي:
طريقة الامكان الاعظم ،وطريقة بيز، وطريقة التوقع البيزي و طريقة بيز الهرمي. ومن اجل المقارنة بين افضلية المقدرات تم استعمال المقياسيين الاحصائيين متوسط مربعات الخطأ(MSE)ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) وتم التوصل الى ان مقدار التوقع البيزي لمعدل الفشل هو الافضل مقارنة ببقية المقدرات وكان هناك تقارب في الافضلية بين مقدرات التوقع البيزي ومقدرات بيز الهرمي كلما ازداد حجم العينة

الكلمات المفتاحية: معدل الفشل ، والتوقع البيزي، وبيز الهرمي ،والتوزيع الاسي .

A comparison Between Maximum Likelihood Method and Bayesian Methods to Estimate the Failure Rate with Type one Censored Data of Failure Samples.

ABSTRACT :
In this paper a comparison between: Maximum Likelihood *estimator ,standard Bayesian estimator ,Expected Bayesian estimator ,and Hierarchical Bayesian estimator for failure rate by considering censored data of type one by using simulation by Monte Carlo method .We conclude that the Expected Bayesian estimator in that best for estimating failure rate using the statistical indicator (MSE) and (MAPE).Also we conclude that the Hierarchical Bayesian estimator and Expected Bayesian estimator have the same preference for large*

(*) جزء مستل من رسالة ماجستير للباحثة الثانية.

$M = \sum_{i=1}^{m} (n_i - r_i) t_i$ *,where* n_i *represented the subsample drawn for each* $i = 1,2, \dots, m$; r_i *is correspondence number of failure unit such that* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$

المقدمة INTRODUCTION

لغرض تطوير صناعة بعض المنتجات الالكترونية ومنها اجهزة حماية الأجهزة الكهربائية المنزلية من تذبذب شدة التيار الكهربائية فأن الكادر الهندسي الفني في اغلب الشركات المصنعة لهذه الاجهزة الالكترونية يقوم باستمرار بتطوير التصاميم الالكترونية لهذه المنتجات . ومن المؤشرات التي تعتمد لغرض تحقيق هذا الغرض استعمال بعض الاساليب الكفأة لتقدير معلمات دالة معدل الفشل (Failure Rate Function) من اجل الوقوف على واقع حال عمل هذه الأجهزة وكفاءتها لغرض تحقيق رغبة وقناعة المستهلك من حسن أداء عمل هذه المصنعات الالكترونية وزيادة طول عمرها التشغيلي.

من المعلوم في اختبارات الحياة(Life Times)للمنتجات الصناعية المختلفة، ولغرض عمل استدلال احصائي حول معلمات التوزيع الاحصائي لأوقات الحياة لهذه المنتجات فان الكادر الفني في اغلب الشركات المصنعة في وحدات البحوث التابعة لهذه الشركات يتعامل مع بيانات مراقبه(Censored Data) لأوقات الحياة لهذه المنتجات الالكترونية ،ولكون حجم العينة في هذه الحالة هو صغير نسبياً في هكذا اختبارات للحياة ولغرض الحصول على مقدرات كفأة لدالة معدل الفشل بعد تحديد التوزيع الاحصائي لأوقات الحياة لهذه المنتجات الالكترونية خلال مدة زمنية محددة لمراقبة عملها ميدانيا خلال فترة الاختبار المخصصة لذلك ، وفي ضوء ما تقدم فأن طرائق بيز في التقدير(Bayesian Estimation methods) تكون ملائمة بدون شك لغرض عمل استدلال احصائي حول المعلمات وذلك لكون حجم العينة صغيرا حيث تلعب المعلومات الاولية في هذه الحالة عن المعلمات المراد تقديرها دورا مهما في تحسين كفاءة المقدر، وكما هو معلوم بطرائق بيز في التقدير ان هذه المعلومات الاولية عن المعلمات يمكن صياغتها بشكل توزيع احتمالي يسمى التوزيع الاولي (Prior Distribution) للمعلمة العشوائية المراد تقديرها بهذا الاسلوب وبالتالي فأن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة (Posterior P. d . F) لهذه المعلمات والتي يمكن الحصول عليها بدمج دالة الامكان للمشاهدات (Likelihood Function)مع الدالة الاحتمالية الاولية باستخدام صيغة بيز (Bayes formula) وعلى ذلك فأن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة سوف تعتمد بدون شك على هذه المعلومات وبتوفر دالة خسارة الخطأ التربيعية (Squared error loss function) فأن مقدر بيز لدالة معدل الفشل هو ذلك المقدر الذي يجعل توقع دالة الخسارة اللاحقة في نهايتها الصغرى ولكون دالة الخسارة هي دالة مربع الخطأ التربيعية فأن مقدر بيز للمعلمة هو المتوسط اللاحق (Posterior mean).

ان المرافقة الاولية (Prior Conjugate) للمعلمة الاساسية في دالة الامكان للمشاهدات هي بحيث ان تكون دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لهذه المعلمة تنتمي لنفس العائلة البراميتيرية أي ان توزيعها الاحتمالي اللاحق هو نفس التوزيع الاحتمالي الاولي لكن بمعلمات مختلفة .

وكما هو معروف فان دالة الكثافة الاحتمالية الاولية تحتوي على معلمة او معلمات تسمى المعلمات الفوقية (Hyper Parameters) لذلك فأن مقدر بيز القياسي (Standard Bayes estimator) لهذه المعلمة سوف تتضمن صيغته هذه المعلمات الفوقية ، وعلى هذا الاساس جاءت فكرة استعمال طريقة التوقع البيزي (Expected Bayesian method) لتقدير المعلمة الاساسية لان مقدر التوقع

البيزي سوف لا تتضمن صيغته على هذه المعلمات الفوقية وبالتالي لن تكون هنالك حاجة لافتراض قيم لها ضمن مجال تعريفها في الجانب العملي وقد تكون هذه القيم الافتراضية للمعلمات الفوقية غير ملائمة لطبيعة المشكلة قيد البحث او يلجأ الاحصائي الى الخوض في اساليب احصائية او برامجية قد تكون غير سهلة لان حالة الطبيعة او المعلمة العشوائية المراد تقديرها غالبا لا توجد مشاهدات حولها دائما هناك مشاهدات حول المتغير العشوائي الشرطي للمشاهدات .

من المعروف ان مقدر بيز الهرمي(Hierarchical Bayes estimator) للمعلمة العشوائية يتضمن في صيغته التقديرية تكاملات غير سهلة قد تحتاج طريقة حساب قيمها برامج حاسوب مثل MCMC (Monte Carlo Markov Chain). واخيرا يمكن القول ان طريقة التوقع البيزي تعرف اسهل الطرائق البيزية في التقدير لان مقدراتها لن تتضمن معلمات فوقية او تكاملات يتطلب احيانا استعمال برامج حاسوب غير سهلة لغرض حساب قيم هذه التكاملات

2. هدف البحث Purpose of research يهدف البحث الى اشتقاق مقدرات الامكان الاعظم ،ومقدر بيز القياسي، ومقدر التوقع البيزي ومقدر بيز الهرمي لمعدل الفشل على افتراض ان توزيع وقت الحياة هو التوزيع الاسي وبوجود بيانات مراقبة من النوع الاول ، ثم اجراء مقارنة باستعمال المحاكاة لغرض التوصل الى المقدر الكفء لمعدل الفشل الذي سوف يستعمل من قبل الكادر الهندسي كمؤشر على كفاءة المنتجات الالكترونية .

3. الجانب النظري Theoretical Part

بالأخذ بنظر الاعتبار بيانات مراقبة من النوع الاول لاختبار اوقات الحياة للمنتج ولـ m من المرات $t_i\ :\ (t_1 < t_2 < \cdots < t_m)$.
علما بأن العينة المسحوبة في كل مرة هي n_i حيث ان $i = 1,2,\ldots,m$.
نفرض ان r_i حيث ان $r_i = 0,1,\ldots,n_i$ يمثل عدد الوحدات الفاشلة لكل n_i بعد عملية الاختبار المباشر ثم وضع احدى الوحدات غير الفاشلة من المنتج بالعمل خلال عملية الاختبار عندئذ يكون الثلاثي (n_i, r_i, t_i) . حيث ان$i = 1,2,\ldots,m$ يسمى بيانات الاختبار لوحدات عددها m من نفس المنتج.

$$f(t) = ℷexp\left(-ℷt\right); t \geq 0 \quad , \quad ℷ > 0 \quad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

ليكن المتغير X_i يمثل عدد الوحدات الفاشلة r_i في عملية الاختبار ، عندئذ $(n_i - r_i)$ يمثل عدد الوحدات غير الفاشلة لكل i ، حيث ان i=1,2,…,m ويكون توزيع المتغير العشوائيX_i هو توزيع بواسون (Poisson Distribution)بمعلمة قياس هي [1]:
$.(n_i - r_i)t_iℷ$

$$P(X_i = r_i) = \frac{[(n_i - r_{i)} t_iℷ]^{r_i}}{(r_i)!} e^{-(n_i-r_i)t_iℷ} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

وتكون دالة الامكان الاعظم للمشاهدات هي :

$$L\left(r/ℷ\right) = \prod_{i=1}^{m} P(X_i = r_i)$$

$$L(r/ℷ) = \prod_{i=1}^{m} [\frac{(n_i - r_i)t_i}{(r_i)!}]^{r_i} ℷ^{r} e^{-Mℷ} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

حيث أن :

$$M = \sum_{i=1}^{m} (n_i - r_i\,)t_i$$

$$r = \sum_{i=1}^{m} r_i$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (3) والاشتقاق بالنسبة الى λ نحصل على مقدر الامكان الاعظم للمعلمة معدل الفشل λ وهو بالصيغة الاتية :

$$\hat{\lambda}_{mle}=\frac{r}{M}=\frac{r}{\sum_{i=1}^{m}(n_i-r_i)t_i} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

نفرض ان التوزيع الاولي للمعلمة العشوائية λ هو توزيع كاما بدالة كثافة احتمالية هي

$$g(\lambda/a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

حيث ان :

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}\,dx \quad , \quad a,b>0$$

هي دالة كاما وان $a,b>0$ هي معلمات فوقية ، وبالرجوع الى الباحث Han [2] فأن قيم a,b يمكن اختيارها بالشكل الذي يجعل الدالة $g(\lambda/a,b)$ دالة متناقصة بالنسبة الى معدل الفشل λ . وبأخذ المشتقة الاولى للدالة $g(\lambda/a,b)$ نجد أن:

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}=\left\{\frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-2}e^{-b\lambda}\right\}\{(a-1)-b\lambda\}\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

أن$a=1,b>0$وبدون فقدان التعميم تجعل $\frac{dg(\lambda,a,b)}{d\lambda}<0$ 7

وبالرجوع الى الباحث *Han* [1]ولغرض الحفاظ على حصانة المقدر البيزي فأن المعلمة الفوقية b لن تكون قيمتها كبيرة جدا عندما$a=1$ يمكن اختيارها بحيث تكون اقل من حد اعلى موجب وليكن c عندئذ يكون لديناكما$0<b<c$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية الاولية للمعلمة العشوائية λ هي:

$$g(\lambda/b)=b\,exp(-\lambda b); \quad b,\lambda>0$$

بفرض ان لدينا دالة خسارة مربع الخطأ (Squared error loss function) فأن مقدر بيز القياسي لمعدل الفشل يكون بالصيغة الاتية :

$$\hat{\lambda}_B=E(\theta/x)$$

$$\hat{\lambda}_B(b)=\frac{r+1}{M+b} \qquad \ldots\ldots \quad (7)$$

ولغرض الحصول على مقدر التوقع البيزي (*Expected Bayesian estimator*)وذلك بافتراض التوزيع الاولي للمعلمة الفوقية b بهو التوزيع المنتظم بحسب الصيغ الثلاثة الاتية:

$$i)\ \pi_1(b)=\frac{2(c-b)}{c^2};0<b<c \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$ii)\ \pi_2(b)=\frac{1}{c};0<b<c \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$iii)\ \pi_3(b)=\frac{2b}{c^2}; \quad 0<b<c \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

وبعد ذلك تم اشتقاق مقدر التوقع البيزي لمعدل الفشل ג الذي يعرف بالصيغة الاتية:

$$\hat{ג}_{EB} = \int_D \hat{ג}_B(b)\pi(b)db \quad = \quad \int_0^c \hat{ג}_B(b)\pi(b)db$$

ان مقدرات التوقع البيزي لمعدل الفشل ג لكل حالة من الحالات (8)،(9)،(10) هي على الترتيب:

$$\hat{ג}_{EB1} = \frac{2(r+1)}{c^2}\left\{(M+c)ln\left(\frac{M+c}{M}\right) - c\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\hat{ג}_{EB2} = \frac{(r+1)}{c} ln\left(\frac{M+c}{M}\right) \quad \ldots\ldots\ldots.. (12)$$

$$\hat{ג}_{EB3} = \frac{2(r+1)}{c^2}\left\{c - Mln\left(\frac{M+c}{M}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots. (13)$$

اما بالنسبة الى مقدرات بيز الهرمية (*Hierarchical Bayes estimators*) لكل حالة فتم افتراضها لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع المعلمة الفوقية b والمعطاة بالمعادلات (8) ، (9)،(10) .وكذلك التوزيع الاولي للمعلمة ג والمعطى في المعادلة (1) فأن مقدرات بيز الهرمي كانت على الترتيب بحسب الصيغ الاتية :

$$\hat{ג}_{HB1} = (r+1)\frac{\int_0^c \frac{b(c-b)}{(M+b)^{r+2}}db}{\int_0^c \frac{b(c-b)}{(M+b)^{r+1}}db} \quad \ldots\ldots\ldots.. (14)$$

$$\hat{ג}_{HB2} = (r+1)\frac{\int_0^c \frac{b}{(M+b)^{r+2}}db}{\int_0^c \frac{b}{(M+b)^{r+1}}\ db} \quad \ldots\ldots\ldots. (15)$$

$$\hat{ג}_{HB3} = (r+1)\frac{\int_0^c \frac{b^2}{(M+b)^{r+2}}\ \ db}{\int_0^c \frac{b^2}{(M+b)^{r+1}}db} \quad \ldots\ldots\ldots.. (16)$$

٤ . المحاكاة ***Simulation***

في هذا الجانب تمت المقارنة بين مقدرات دالة معدل الفشل لمختلف طرائق التقدير من خلال توظيف المحاكاة بطريقة مونت كارلو . ببرنامج كتب بلغة ماتلاب وبحسب الخطوات الا تية :

١. تحديد القيمة الافتراضية للمعلمة ג هي $ג = 0.08$.
٢. تحديد القيم الافتراضية للمعلمة الفوقية b والحد الاعلى لها c وكالاتي:

الجدول (١)
المعلمة الفوقية *b* والحد الاعلى لها *c*

b	الحد الاعلى c		
1	4	5	6
2	4	5	6

٣. تحديد القيم الافتراضية لحجم العينة m وهي $m = 5,10,15$.
٤. افتراض حجم العينات الجزئية المسحوبة n_i لكل $i = 1,2,\dots,m$
٥. توليد بيانات اوقات الحياة t_i حيث ان $i = 1,2,\dots,m$ والتي تتوزع اسيا وذلك باستخدام دالة التوزيع التراكمية c .d .f.
٦. توليد عدد الوحدات الفاشلة r_i المقابلة لكل n_i .
٧. المقارنة بين كفاءة المقدرات باستعمال المقياسين الاحصائيين متوسط مربعات الخطأ Mean square error (MSE) ومتوسط الخطا النسبي المطلق Mean absolute percentage error (MAPE). وبحسب الصيغ الاتية:

$$MAPE\left(\hat{\gimel}\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left|\frac{\gimel-\hat{\gimel}}{\gimel}\right| \qquad \dots\dots\dots (17)$$

$$MSE\left(\hat{\gimel}\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(\gimel-\hat{\gimel})^2 \qquad \dots\dots\dots (18)$$

حيث ان: $\hat{\gimel}$ مقدر معدل الفشل بحسب طريقة التقدير .
$\gimel$ القيمة الحقيقية لمعدل الفشل $\gimel$.
L عدد مكررات كل تجربة (L=1000).

والجداول الاتية تمثل عرض وتحليل نتائج محاكاة طرائق التقدير للوصول الى افضل المقدرات لمعلمة معدل الفشل وبكافة الطرائق المبينة في الجانب النظري اضافة الى معايير المقارنة المستخدمة.

5. الاستنتاجات Conclusions

من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة لمقارنة طرائق التقدير في البحث لمعدل الفشل تم التوصل الى النتائج الاتية:

١. اتضح ان طريقة الامكان الاعظم في تقدير معدل الفشل لم تكن لها افضلية تذكر في تقدير معدل الفشل باستخدام المقياسين (MSE) و (MAPE).
٢. طريقة التوقع البيزي لتقدير معدل الفشل افضل طرائق التقدير لامتلاكها متوسط خطأ نسبي مطلق (MAPE)اصغر مقارنة بالطرائق الاخرى في التقدير ولحجوم العينات كافة وكذلك كانت هذه الطريقة في التقدير هي الافضل باستخدام المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ(MSE)لتقدير معدل الفشل ولحجوم العينات كافة .
٣. اتضح التقارب بين مقدرات التوقع البيزي لمعدل الفشل مع مقدرات بيز الهرمي لمعدل الفشل بالصيغ الثلاث ويزداد هذا التقارب كلما كبر حجم العينة.ولكن يفضل في التطبيق العملي استعمال طريقة التوقع البيزي لسهولة حساب المقدرات مقارنة بطريقة بيز الهرمي التي تتضمن تكاملات تحتاج الى برامج خاصة لغرض حسابها.
٤. كلما ازدادت قيمة المعلمة الفوقية b اقترب مقدر الامكان الاعظم من مقدر بيز القياسي مع بقاء الافضلية للمقدر البيزي.

٥. للحصول على نتائج دقيقة ومرضية يجب أن لا تبتعد قيمة المعلمة الفوقية b عن الحد الاعلى لها c.لان ذلك يؤثر على حصانة المقدر البيزي كما جاء في البحوث المتعلقة بالموضوع.
٦. ظهر أن قيم متوسط مربعات الخطأ ومتوسط الخطأ النسبي المطلق تتناقص بزياده حجم العينة ولجميع الطرائق في التقدير وهذا يتطابق مع النظرية الاحصائية .
٧. عند زياده حجم العينة نجد ان هنالك تقاربا بين المقدرات .

٦. التوصيات Recommendations

١. انطلاقا من الاستنتاجات الخاصة بتقدير معدل الفشل فأن الباحثة ترى أستعمال طريقة التوقع البيزي في التقدير في الدراسات التطبيقية لان صيغة المقدرات في هذه الحالة لا تعتمد على المعلمات الفوقية كذلك ليس هنالك تكاملات يتوجب ايجاد قيمها استعمال برامج خاصة كما هي الحالة في طريقة بيز الهرمي.

٢. البحث نظريا وتطبيقيا في مسالة ايجاد مقدر التوقع البيزي لدالة معدل الفشل وكذلك المعولية لتوزيعات فشل اخرى مثل توزيع لوغاريتم الطبيعي (*Log*-normal distribution)،وتوزيع رايلي(Rally distribution)،و توزيع باريتو(Pareto distribution)، وتوزيع ويبل(Weibull distribution)الى غير ذلك من التوزيعات التي لم يتم حساب مقدر التوقع البيزي لها لحد الان على حد علم الباحثة وبما يتلاءم مع طبيعة البيانات المتوافرة لأوقات الحياة للمنتجات الالكترونية بعد اجراء اختبار حسن مطابقة البيانات المتوافرة لأوقات الحياة لتوزيع احصائي معين .
٣. استعمال طريقة التوقع البيزي لتقدير معولية انظمة الانتاج المختلفة سواء كانت انظمة متوازية (Parallel systems)ام انظمة متسلسلة (System)ام انظمة مشتركة.

٧. المصادر *References*

[1] ***Han ,M. (2006), "****E-Bayesian method to estimate the failure rate" ,The sixth International Symposium on Operation Research and It's Application (ISORA'60), Xinjiang, China ,August 8-12-2006, Copyright©2006,ORCS&APORC ,pp.299-311.*

[2] ***Han ,M. (2010),"*** *E- Bayesian estimation of Reliability derived from Binomial Distribution" ,Journal of home page:* ***www.elsevier.com/locate/pam***

[3] ***Wang ,J; Li ,Dan and Chen,D.(2012)****," E- Bayesian estimation Hierarchical Bayesian estimation of system Reliability parameter", Journal of home page:* ***www.elsevier.com/locate/pam***

الجدول (٢)

مقدرات طرائق التقدير المختلفة عندما b=1 وقيمة المعلمة الافتراضية λ=0.08

c	m	$\hat{\lambda}_{HB3}$	$\hat{\lambda}_{HB2}$	$\hat{\lambda}_{HB1}$	$\hat{\lambda}_{EB3}$	$\hat{\lambda}_{EB2}$	$\hat{\lambda}_{EB1}$	$\hat{\lambda}_{B}$	$\hat{\lambda}_{mle}$
4	5	0.04699747	0.04723673	0.04747598	0.04689230	0.04701778	0.04725328	0.04833565	0.03988549
	10	0.05077094	0.05115641	0.05154188	0.05060521	0.05080830	0.05118598	0.05294645	0.04000478
	15	0.04699747	0.04723673	0.04747598	0.04689230	0.04701778	0.04725328	0.04833565	0.03988549
5	5	0.05882708	0.06000358	0.06118009	0.05837004	0.05899878	0.06012389	0.06543084	0.03740980
	10	0.04949148	0.04996444	0.05043740	0.04929693	0.04954955	0.05001031	0.05202331	0.03898325
	15	0.04950979	0.04982561	0.05014144	0.04937744	0.04954582	0.04985504	0.05118338	0.04267439
6	5	0.05736355	0.05810510	0.05940933	0.05787390	0.05924695	0.06062000	0.06530332	0.03697970
	10	0.04923604	0.04979913	0.05036223	0.04901275	0.04931665	0.04986253	0.05214367	0.03921920
	15	0.04787427	0.04823968	0.04860510	0.04772565	0.04792225	0.04827870	0.04973967	0.04136074

نلاحظ من الجدول اعلاه اقتراب القيم التقديرية لمعدل الفشل λ من القيمة الحقيقية (الافتراضية) وذلك باستعمال طريقة التوقع البيزي (Expected Bayesian method) وطريقة بيز الهرمي (Hierarchical Bayesian method) كما نلاحظ ان طريقة بيز القياسي(Standard Bayesian method) جاءت بالرتبة اللاحقة في حين تخلفت طريقة الامكان الاعظم وذلك لابتعاد القيمة التقديرية عن القيمة الحقيقية لمعدل الفشل λ

الجدول (3)

مقدرات طرائق التقدير المختلفة عندما b=2 وقيمة المعلمة الافتراضية λ=0.08

c	m	$\hat{\lambda}_{HB3}$	$\hat{\lambda}_{HB2}$	$\hat{\lambda}_{HB1}$	$\hat{\lambda}_{EB3}$	$\hat{\lambda}_{EB2}$	$\hat{\lambda}_{EB1}$	$\hat{\lambda}_{B}$	$\hat{\lambda}_{mle}$
4	5	0.04699747	0.04723673	0.04747598	0.04689230	0.04701778	0.04725328	0.04833565	0.03988549
	10	0.05077094	0.05115641	0.05154188	0.05060521	0.05080830	0.05118598	0.05294645	0.04000478
	15	0.04699747	0.04723673	0.04747598	0.04689230	0.04701778	0.04725328	0.04833565	0.03988549
5	5	0.05882708	0.06000358	0.06118009	0.05837004	0.05899878	0.06012389	0.06543084	0.03740980
	10	0.04949148	0.04996444	0.05043740	0.04929693	0.04954955	0.05001031	0.05202331	0.03898325
	15	0.04950979	0.04982561	0.05014144	0.04937744	0.04954582	0.04985504	0.05118338	0.04267439
6	5	0.05736355	0.05810510	0.05940933	0.05787390	0.05924695	0.06062000	0.06530332	0.03697970
	10	0.04923604	0.04979913	0.05036223	0.04901275	0.04931665	0.04986253	0.05214367	0.03921920
	15	0.04787427	0.04823968	0.04860510	0.04772565	0.04792225	0.04827870	0.04973967	0.04136074

نلاحظ من الجدول اعلاه اقتراب القيم التقديرية لمعدل الفشل λ من القيمة الحقيقية (الافتراضية) وذلك باستعمال طريقة التوقع البيزي (Expected Bayesian method) وطريقة بيز الهرمي (Hierarchical Bayesian method) كما نلاحظ ان طريقة بيز القياسي(Standard Bayesian method) جاءت بالرتبة اللاحقة في حين تخلفت طريقة الامكان الاعظم وذلك لابتعاد القيمة التقديرية عن القيمة الحقيقية لمعدل الفشل λ

الجدول (4)

MAPE لطرائق التقدير المختلفة عندما b=1 وقيمة المعلمة الافتراضية λ=0.08

c	m	$\hat{\lambda}_{HB3}$	$\hat{\lambda}_{HB2}$	$\hat{\lambda}_{HB1}$	$\hat{\lambda}_{EB3}$	$\hat{\lambda}_{EB2}$	$\hat{\lambda}_{EB1}$	$\hat{\lambda}_{B}$	$\hat{\lambda}_{mle}$
4	5	0.66692191	0.67214675	0.67214675	0.68032576	0.67694507	0.68672725	0.73456070	0.91732059
	10	0.55823604	0.56100695	0.56100695	0.56557232	0.56439967	0.56931956	0.58864255	0.63894163
	15	0.46163680	0.46272181	0.46272181	0.46445547	0.46393648	0.46582658	0.47319852	0.51807871
5	5	0.63303846	0.64397369	0.65633518	0.63195954	0.63883813	0.64878374	0.71578587	0.86995258
	10	0.56953625	0.57504713	0.58079745	0.56832561	0.57164756	0.57682657	0.60254777	0.66124097
	15	0.46322196	0.46406001	0.46406001	0.46548440	0.46515995	0.46667046	0.47191530	0.51807871
6	5	0.65110107	0.66311815	0.67689560	0.65149118	0.65920819	0.67000053	0.73860710	0.90356738
	10	0.55989526	0.56685729	0.57417259	0.55862168	0.56292307	0.56940488	0.59934004	0.64930782
	15	0.48982522	0.49415077	0.49855777	0.48894060	0.49159206	0.49562888	0.51323319	0.54077868

نلاحظ من الجدول اعلاه تساوي طريقة بيز الهرمي وطريقة التوقع البيزي لتقدير معدل الفشل في عدد مرات الأفضلية وكانت طريقة التوقع البيزي في التقدير بالصيغة $\hat{\lambda}_{EB3}$ والمقدرة بالجانب النظري بالمعادلة (2-44) هي الافضل لامتلاكها اصغر قيمة من متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE)

جدول (4-1)

توضيح للمقارنة بين الصيغ المتقابلة التي لها نفس التوزيع الاولي للمعلمة الفوقية وباستعمال الطريقتين(التوقع البيزي وبيز الهرمي) لتقدير معدل الفشل

المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الأفضلية
$\hat{\lambda}_{EB1}$	5	$\hat{\lambda}_{EB2}$	5	$\hat{\lambda}_{EB3}$	5
$\hat{\lambda}_{HB1}$	5	$\hat{\lambda}_{HB2}$	5	$\hat{\lambda}_{HB3}$	5

الجدول (5)

MAPE لطرائق التقدير المختلفة عندما b=2 وقيمة المعلمة الافتراضية $\lambda=0.08$

c	m	$\hat{\lambda}_{HB3}$	$\hat{\lambda}_{HB2}$	$\hat{\lambda}_{HB1}$	$\hat{\lambda}_{EB3}$	$\hat{\lambda}_{EB2}$	$\hat{\lambda}_{EB1}$	$\hat{\lambda}_{B}$	$\hat{\lambda}_{mle}$
4	5	0.66692191	0.67214675	0.67214675	0.66032576	0.67194507	0.66672725	0.73456070	0.91732059
	10	0.55823604	0.56100695	0.56100695	0.56557232	0.56039967	0.56031956	0.58864255	0.63894163
	15	0.46163680	0.46272181	0.46272181	0.46445547	0.46393648	0.46582658	0.47319852	0.51807871
5	5	0.66032498	0.66673707	0.66673707	0.67556832	0.67059678	0.68183480	0.73456070	0.91732059
	10	0.55377302	0.55725158	0.55725158	0.56267884	0.56090754	0.56685924	0.58864255	0.63894163
	15	0.45996423	0.46131988	0.46131988	0.46338575	0.46259401	0.46487783	0.47319852	0.51807871
6	5	0.62571891	0.63361388	0.63361388	0.64432629	0.63777547	0.65132533	0.71578587	0.86995258
	10	0.56651021	0.57045303	0.57845303	0.56530703	0.57182457	0.57747135	0.60254777	0.66124097
	15	0.48494060	0.49159206	0.49859206	0.48562888	0.49015077	0.49155777	0.51323319	0.54077868

نلاحظ من الجدول اعلاه تساوي طريقة بيز الهرمي وطريقة التوقع البيزي لتقدير معدل الفشل في عدد مرات الافضلية وكانت طريقة التوقع البيزي في التقدير بالصيغة $\hat{\lambda}_{EB3}$ والمقدرة بالجانب النظري بالمعادلة (2-44) هي الافضل لامتلاكها اصغر قيمة من متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE)

جدول(5-1)

توضيح للمقارنة بين الصيغ المتقابلة التي لها نفس التوزيع الاولي للمعلمة الفوقية وباستعمال الطريقتين(التوقع البيزي وبيز الهرمي) لتقدير معدل الفشل

عدد مرات الأفضلية	المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر
5	$\hat{\lambda}_{EB3}$	5	$\hat{\lambda}_{EB2}$	5	$\hat{\lambda}_{EB1}$
5	$\hat{\lambda}_{HB3}$	5	$\hat{\lambda}_{HB2}$	5	$\hat{\lambda}_{HB1}$

الجدول رقم (6)

يمثل MSE لطرائق التقدير المختلفة عندما b=1 وقيمة المعلمة الافتراضية λ=0.08

c	m	$\hat{\lambda}_{HB3}$	$\hat{\lambda}_{HB2}$	$\hat{\lambda}_{HB1}$	$\hat{\lambda}_{EB3}$	$\hat{\lambda}_{EB2}$	$\hat{\lambda}_{EB1}$	$\hat{\lambda}_{B}$	$\hat{\lambda}_{mle}$
4	5	49.2501E-03	50.8171E-03	53.3321E-03	49.8665E-03	52.5403E-03	55.3874E-03	68.5476E-03	68.8137E-03
	10	28.4800E-03	28.8441E-03	29.4513E-03	28.6620E-03	29.2964E-03	29.9572E-03	32.6370E-03	36.1025E-03
	15	20.4611E-03	20.5960E-03	20.8209E-03	20.5284E-03	20.7626E-03	21.0067E-03	21.9756E-03	24.9979E-03
5	5	44.2602E-03	47.2330E-03	50.4646E-03	43.7627E-03	45.5622E-03	48.3166E-03	65.7655E-03	63.8322E-03
	10	29.9709E-03	30.7585E-03	31.5869E-03	29.7943E-03	30.2655E-03	31.0087E-03	34.7337E-03	38.6282E-03
	15	8.07260E-03	8.11410E-03	8.18630E-03	8.09750E-03	8.17200E-03	8.24880E-03	8.5182E-03	9.7648E-03
6	5	44.6684E-03	48.1367E-03	51.9443E-03	44.2901E-03	46.4821E-03	49.6637E-03	68.4421E-03	66.8398E-03
	10	28.1308E-03	29.0278E-03	29.9822E-03	27.9670E-03	28.5165E-03	29.3561E-03	33.469E-03	36.5555-03
	15	22.8066E-03	23.2834E-03	23.7845E-03	22.7114E-03	23.0026E-03	23.4503E-03	25.5255E-03	27.2402E-03

نلاحظ من الجدول اعلاه تساوي طريقة بيز الهرمي وطريقة التوقع البيزي لتقدير معدل الفشل في عدد مرات الأفضلية وكانت طريقة التوقع البيزي في التقدير بالصيغة $\hat{\lambda}_{EB3}$ والمقدرة بالجانب النظري بالمعادلة (2-44) هي الافضل لامتلاكها اصغر قيمة من مربع متوسط الخطأ (MSE)

جدول(6 -1)

توضيح للمقارنة بين الصيغ المتقابلة التي لها نفس التوزيع الاولي للمعلمة الفوقية وباستعمال الطريقتين(التوقع البيزي وبيز الهرمي) لتقدير معدل الفشل

المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الأفضلية
$\hat{\lambda}_{EB1}$	5	$\hat{\lambda}_{EB2}$	5	$\hat{\lambda}_{EB3}$	5
$\hat{\lambda}_{HB1}$	5	$\hat{\lambda}_{HB2}$	5	$\hat{\lambda}_{HB3}$	5

الجدول رقم (7)

يمثل MSE لطرائق التقدير المختلفة عندما b=2 وقيمة المعلمة الافتراضية λ=0.08

c	m	$\hat{\lambda}_{HB3}$	$\hat{\lambda}_{HB2}$	$\hat{\lambda}_{HB1}$	$\hat{\lambda}_{EB3}$	$\hat{\lambda}_{EB2}$	$\hat{\lambda}_{EB1}$	$\hat{\lambda}_{B}$	$\hat{\lambda}_{mle}$
4	5	49.2501E-03	50.8171E-03	53.3321E-03	49.8665E-03	52.5403E-03	55.3874E-03	68.5476E-03	68.8137E-03
	10	28.5800E-03	28.8441E-03	29.8513E-03	28.3620E-03	28.2964E-03	29.9572E-03	32.6370E-03	36.1025E-03
	15	20.5611E-03	20.7960E-03	21.0009E-03	20.4284E-03	20.5626E-03	20.8067E-03	21.9756E-03	24.9979E-03
5	5	47.0664E-03	48.9428E-03	51.7929E-03	47.5745E-03	50.6462E-03	53.9659E-03	68.5476E-03	68.8137E-03
	10	27.9047E-03	28.3520E-03	29.0646E-03	28.0800E-03	28.8331E-03	29.6261E-03	32.6370E-03	36.1025E-03
	15	20.2459E-03	20.4125E-03	20.6777E-03	20.3102E-03	20.5897E-03	20.8841E-03	21.9756E-03	24.9979E-03
6	5	42.9502E-03	44.0133E-03	47.2037E-03	41.2858E-03	44.0055E-03	47.1636E-03	65.7655E-03	0.00638322
	10	29.4504E-03	30.1069E-03	31.6436E-03	29.2010E-03	29.2988E-03	30.2534E-03	34.7337E-03	0.00386282
	15	22.8014E-03	23.2826E-03	23.7503E-03	22.7166E-03	23.0034E-03	23.4845E-03	25.5255E-03	0.00272402

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة التوقع البيزي هي الافضل لتقدير معدل الفشل مقارنة بالطرائق الاخرى تليها في الافضلية طريقة بيز الهرمي وان افضل طريقة في التقدير كانت الصيغة $\hat{\lambda}_{EB3}$ والمقدرة بالجانب النظري بالمعادلة (2-44) لامتلاكها اصغر متوسط مربعات خطأ (MSE)

الجدول(7-1)

توضيح للمقارنة بين الصيغ المتقابلة التي لها نفس التوزيع الاولي للمعلمة الفوقية وباستعمال الطريقتين(التوقع البيزي وبيز الهرمي) لتقدير معدل الفشل

المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الافضلية	المقدر	عدد مرات الأفضلية
$\hat{\lambda}_{EB1}$	6	$\hat{\lambda}_{EB2}$	6	$\hat{\lambda}_{EB3}$	6
$\hat{\lambda}_{HB1}$	4	$\hat{\lambda}_{HB2}$	4	$\hat{\lambda}_{HB3}$	4